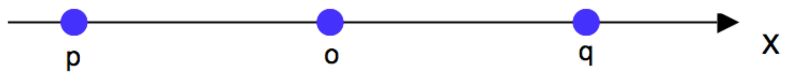
Déterminez le lieu des points du plan dont la somme des carrés des distances à deux points fixes égale le carré de la distance de ces deux points.

- ▶ p et q les points fixes
- ▶ $a \in \mathbb{R}_0^+ : d(p,q) = 2a$

Choix du repère: l'axe X passe par p et q; l'origine o = le milieu de $[p,q]$



✱ $p = (-a,0)$ et $q = (a,0)$

Le lieu des points recherchés égale

$$L = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \middle| d^2(v,p) + d^2(v,q) = d^2(p,q) \right\}$$

$$L = \left\{ (x,y) \middle| d^2((x,y),(-a,0)) + d^2((x,y),(a,0)) = (2a)^2 \right\}$$

Développons la condition de définition de L:

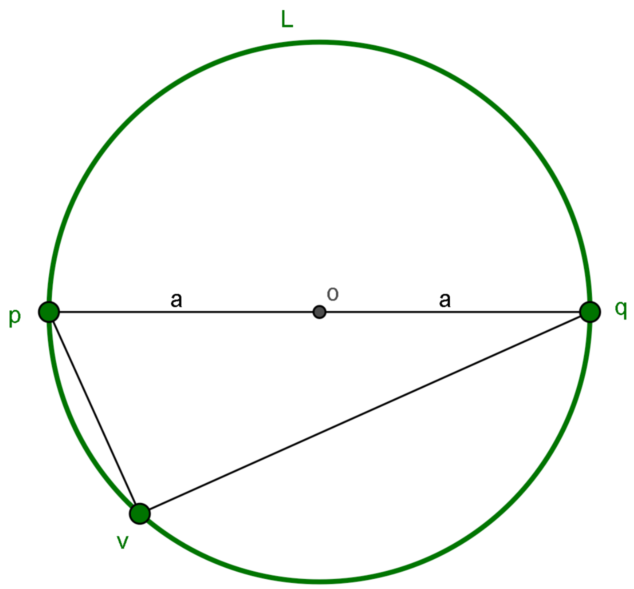
$$(x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = 4a^2$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2a^2 = 4a^2$$

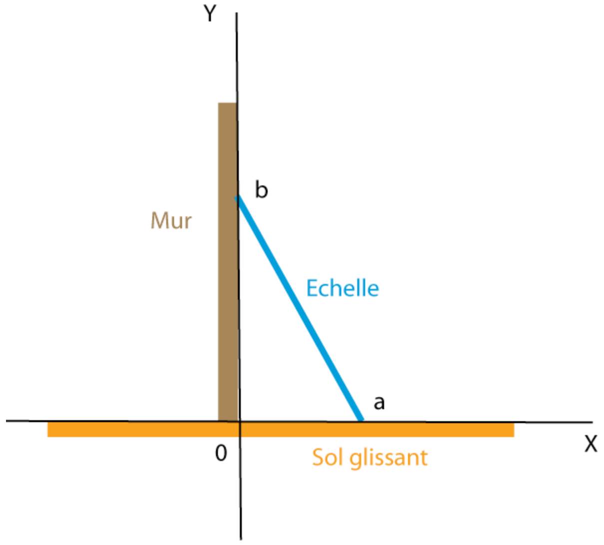
d'où $L \equiv x^2 + y^2 = a^2$

En conclusion :

L est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon a, c'est-à-dire le cercle passant par les deux points fixes et dont le centre est le milieu de ces deux points.



Une échelle de longueur d, appuyée contre un mur vertical, glisse sur le sol. Quel est le lieu du milieu de cette échelle ?



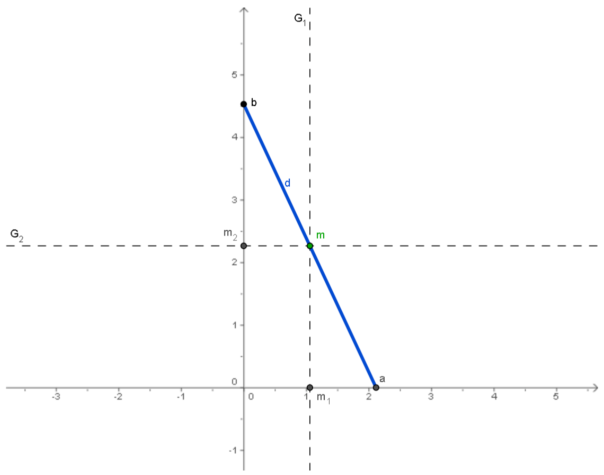
Choix du repère:
axe X = le sol, axe Y = le mur

▶ a et b les points de contact de l'échelle avec le sol et le mur respectivement.

▶ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ : a = (2\alpha, 0)$ et $b = (0, 2\beta)$

✱ $(2\alpha)^2 + (2\beta)^2 = d^2$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{d^2}{4}$$



Le milieu de l'échelle est obtenu par deux génératrices:

G_1 = la médiatrice de $[o, a]$

G_2 = la médiatrice de $[o, b]$

$$\begin{cases} G_1 \equiv x = \alpha \\ G_2 \equiv y = \beta \end{cases}$$

Eliminons les paramètres α et β afin d'obtenir l'équation du lieu.

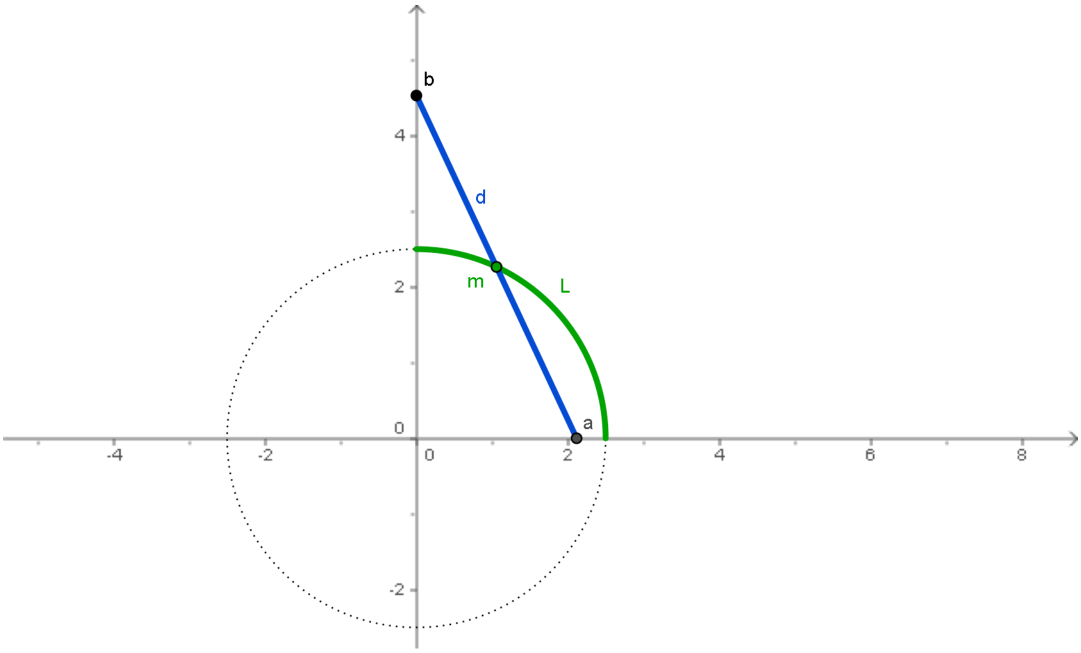
$$x^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{d^2}{4}$$

$$\boxed{L \equiv x^2 + y^2 = \frac{d^2}{4}}$$

Les calculs nous fournissent ainsi l'équation du cercle de centre (0,0) et de rayon $\frac{d}{2}$

Interprétation du résultat

page suivante



Visiblement, l'échelle glissant dans "le premier quadrant", le lieu proprement dit se réduit au quart de cercle dont le centre est le pied du mur et dont le rayon égale la moitié de la longueur de l'échelle.