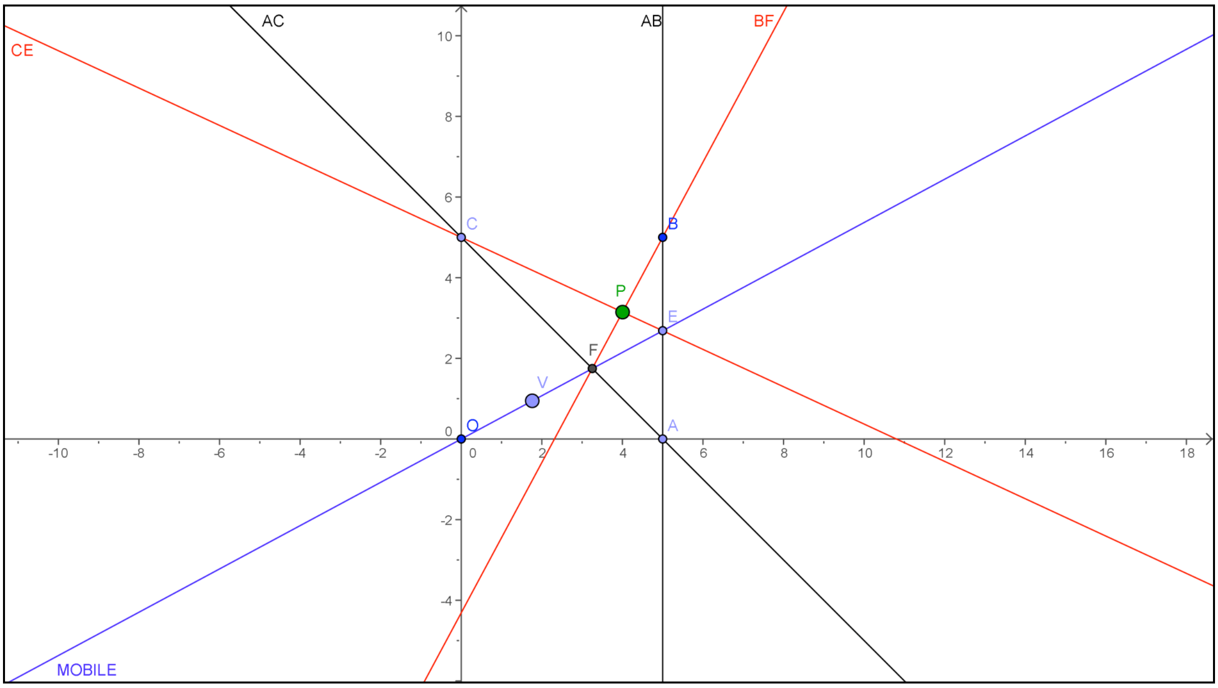
Dans le plan cartésien muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y, on donne les point fixes A(5;0) B(5;5) et C(0;5).
Une droite mobile, passant par O, coupe la droite AB en E et la droite AC en F.
Les droites BF et CE se coupent en P.
a) Établissez une équation cartésienne du lieu géométrique du point P.
b) Quelle est la nature de ce lieu? Déterminez la position de son centre de symétrie, s'il existe.
c) Construisez et représentez ce lieu en prenant comme unité de mesure le cm



Une droite mobile m qui passe par l'origine a pour équation $m \equiv y = \lambda x$.
La droite AB a pour équation x = 5.
Le point E de l'intersection de m avec AB a donc pour coordonnée $(5,5\lambda)$

La droite AC a pour équation x + y = 5.

Le point d'intersection de AC avec m est donc $F = \left(\frac{5}{1+\lambda},\frac{5\lambda}{1+\lambda}\right)$

Le point P du lieu recherché s'obtient par les génératrices BF et CE.
Calculons leurs équations :

$$BF \equiv x - \lambda y + 5(\lambda - 1) = 0$$

$$CE \equiv (1-\lambda)x + y - 5 = 0$$

L'équation du lieu recherché s'obtient en éliminant le paramètre λ des équations des génératrices (par exemple on tire λ de l'éq de CE et on le remplace dans l'éq de BF) :
On obtient : $L \equiv x^2 - y^2 - xy + 10y - 25 = 0$
C'est visiblement l'équation d'une conique.
En l'écrivant sous forme matricielle, on voit que c'est une hyperbole et que son centre est le point (2,4).
Pour faire un dessin de la situation, il peut être intéressant de calculer les asymptotes de L : ce sont les droites qui relient les points à l'infini de l'hyperbole à son centre.

Les points à l'infini s'obtiennent en résolvant le système : $\begin{cases} x^2 - y^2 - xy + 10yz - 25z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

En posant x = 2, on obtient $y = -1 \pm \sqrt{5}$,

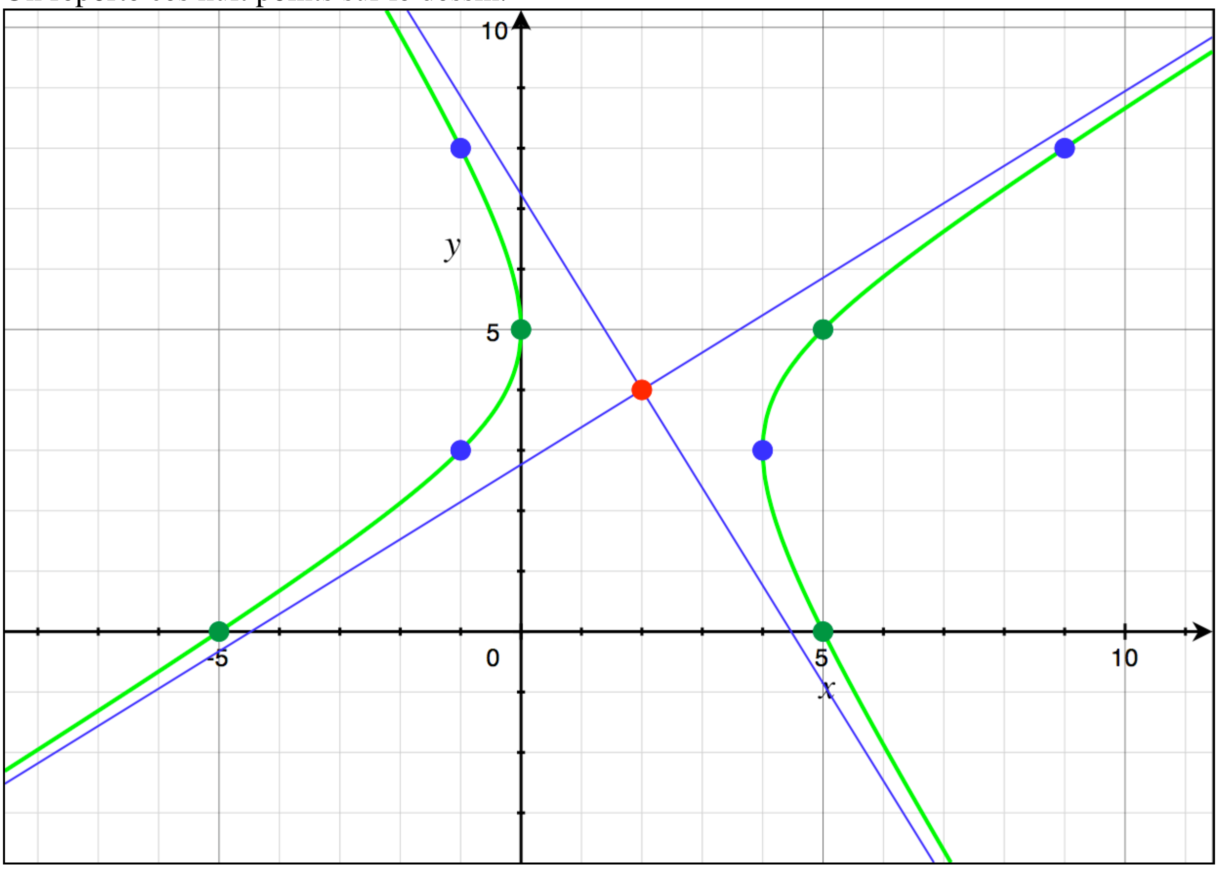
ce qui fournit les points à l'infini : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1-\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$.

En les reliant au centre $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient les asymptotes : $\begin{array}{l} A_1 \equiv y = \dfrac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}x + 5 - \sqrt{5} \\ A_2 \equiv y = \dfrac{\left(-\sqrt{5}-1\right)}{2}x + 5 + \sqrt{5} \end{array}$

Leurs pentes sont environ 0,618 et –1,618 et elles passent par (2,4).
On dessine ces asymptotes.

Ce qui permet également de fournir un dessin convenable de l'hyperbole, ce sont les points que l'on détecte à l'oeil nu : (5,0), (-5,0), (0,5), (5,5).
Ils vérifient évidemment l'équation de L. Et leurs symétriques par rapport au centre sont aussi sur la conique. Il s'agit des points (-1,8), (9,8), (4,3), (-1,3).

On reporte ces huit points sur le dessin.



Et voilà, en vert les points évidents. En rouge, le centre. En bleu les symétriques des verts par rapport au rouge.