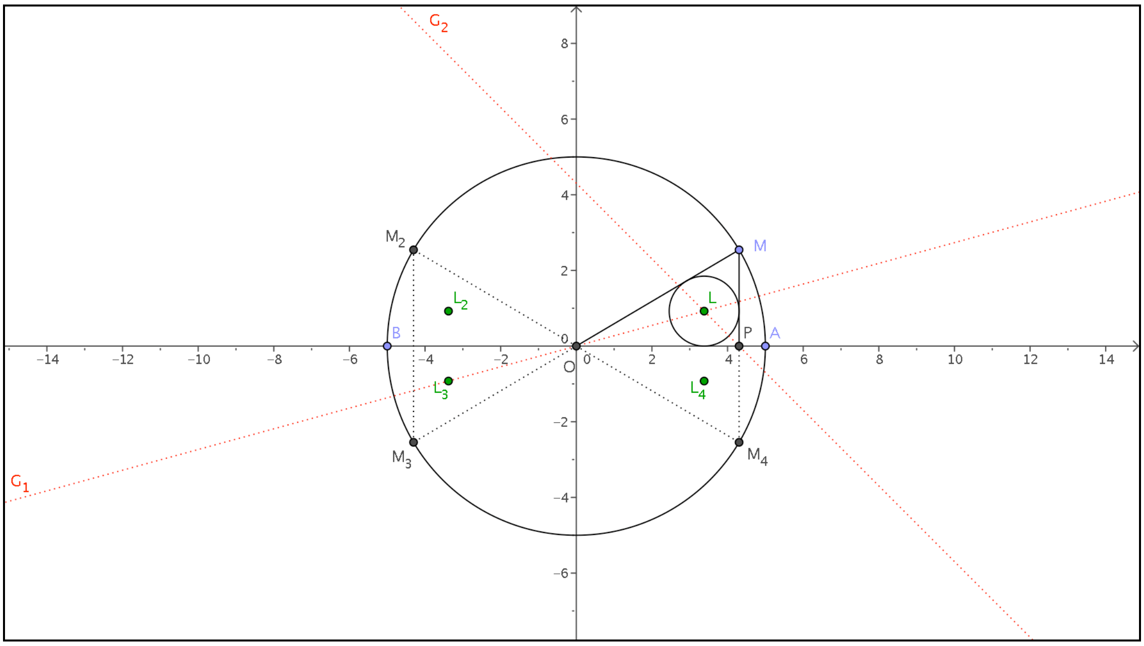
Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y, on donne les points fixes A(5;0) et B(-5;0). Un point M parcourt le cercle C de diamètre BA. Par M, on abaisse sur BA la perpendiculaire MP (P est situé sur BA). Déterminez le lieu géométrique du centre du cercle inscrit au triangle OMP

Rappel : le centre du cercle inscrit à un triangle est le point de l'intersection des bissectrices des angles du triangle (et deux bissectrices suffisent pour déterminer ce centre).




Remarque : Pour des raisons évidentes de construction, le lieu recherché est symétrique par rapport à l'axe X, par rapport à l'axe Y et par rapport à l'origine O du repère.
On se contentera donc, pour commencer, de déterminer les points du lieu qui se trouvent dans le premier quadrant du cercle C.

Calculs :

Choisissons comme paramètre l'angle $\alpha = \widehat{POM},\ 0° \le \alpha \le 90°$, et comme génératrices des points du lieu, la droite $G_1$, bissectrice de l'angle $\widehat{POM}$ et la droite $G_2$, bissectrice de $\widehat{MPO}$.

$G_1$ passe par le point de coordonnée (0,0) et a pour pente $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Son équation est : $G_1 \equiv y = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot x$.

$G_2$ passe par le point $(5\cos\alpha, 0)$ et a pour pente $-1$. Son équation est : $G_2 \equiv y = -x + 5\cos\alpha$.

L'équation du lieu s'obtient en éliminant le paramètre $\alpha$ des équations des génératrices.

De $G_1$ on tire : $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{y}{x}$, et se souvenant de l'identité $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ on obtient $\cos\alpha = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

que l'on injecte dans $G_2$. Il vient successivement :

$$y = -x + 5\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ;\ \left(x^2+y^2\right)y = -x\left(x^2+y^2\right) + 5\left(x^2-y^2\right);$$

$$\left(x^2+y^2\right)(x+y) - 5(x-y)(x+y) = 0\ ;\ (x+y)\left(x^2+y^2-5x+5y\right) = 0$$

$$(x+y)\left(x^2-5x+\frac{25}{4}+y^2+5y+\frac{25}{4}-\frac{50}{4}\right) = 0\ ;\ (x+y)\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{2}\right) = 0$$

Le lieu (réduit au premier quadrant) est donc la réunion

de la droite $D \equiv x + y = 0$ et du cercle $\Gamma$ de centre $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ et de rayon $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

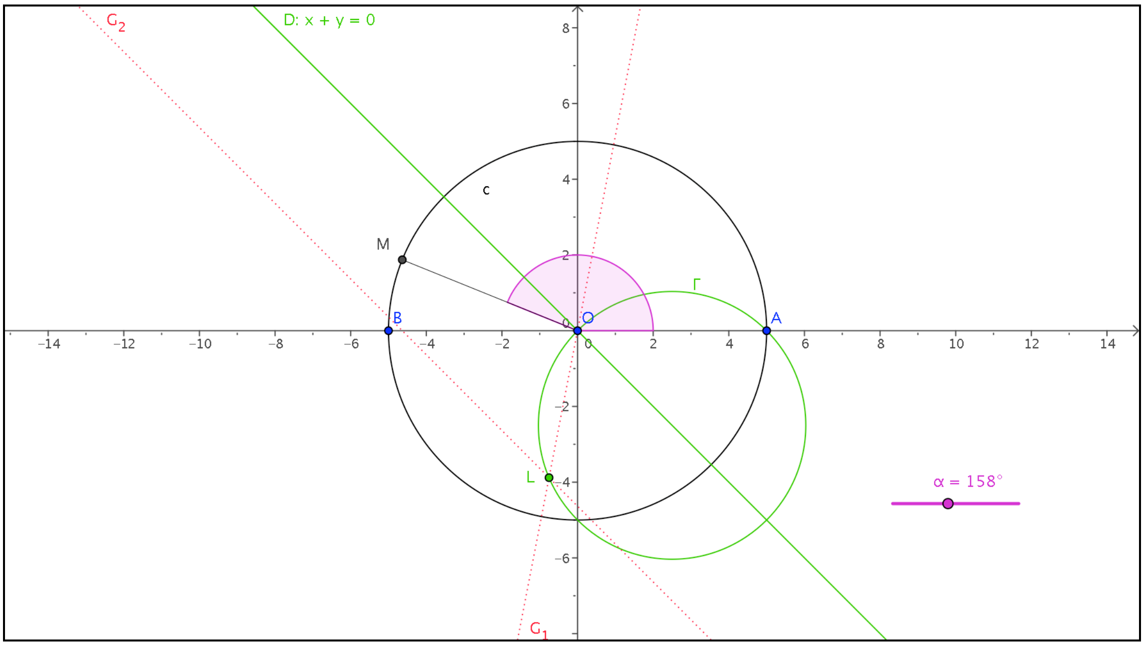



figure 2

Analyse du lieu :
Les points du **lieu proprement dit** doivent clairement se situer dans le premier quadrant du cercle C, puisque c'est dans ce quadrant que se promène le triangle OMP.

Les points du cercle $\Gamma$ situés sous l'axe X sont donc parasites. Ils correspondent à un angle $\alpha$ supérieur à 90° (voir figure 2).
La droite D est également parasite, elle est obtenue quand $\alpha = 270°$ (voir figure 3).

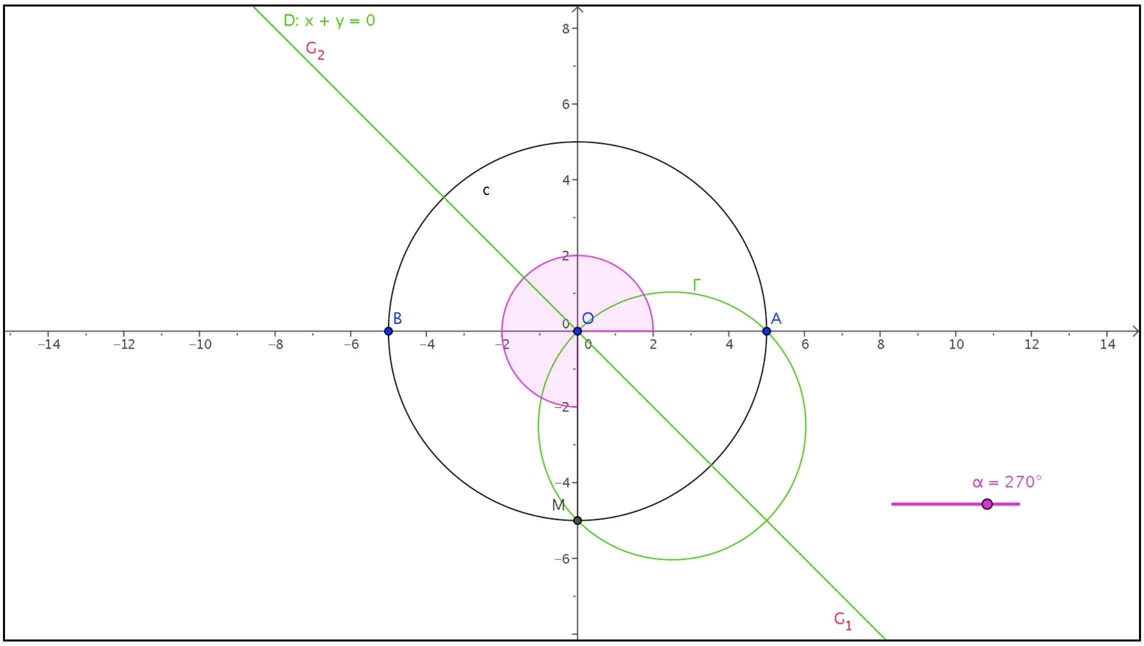



figure 3

L.a droite D est, de surcroît, un **lieu singulier**, car elle est obtenue quand les génératrices $G_1$ et $G_2$ coïncident.

Le lieu proprement dit se réduit donc à l'arc du cercle Γ situé dans le premier quadrant de C.
Les lecteurs pointilleux ajouteront qu'il faut en exclure les points A et O.

Finalement :
**Tenant compte de la remarque faite sur la symétrie du lieu recherché, celui-ci est la réunion de quatre arcs de cercle : l'arc AO du cercle Γ situé au-dessus de l'axe X et ses trois symétriques par rapport à X, à Y et à O.**

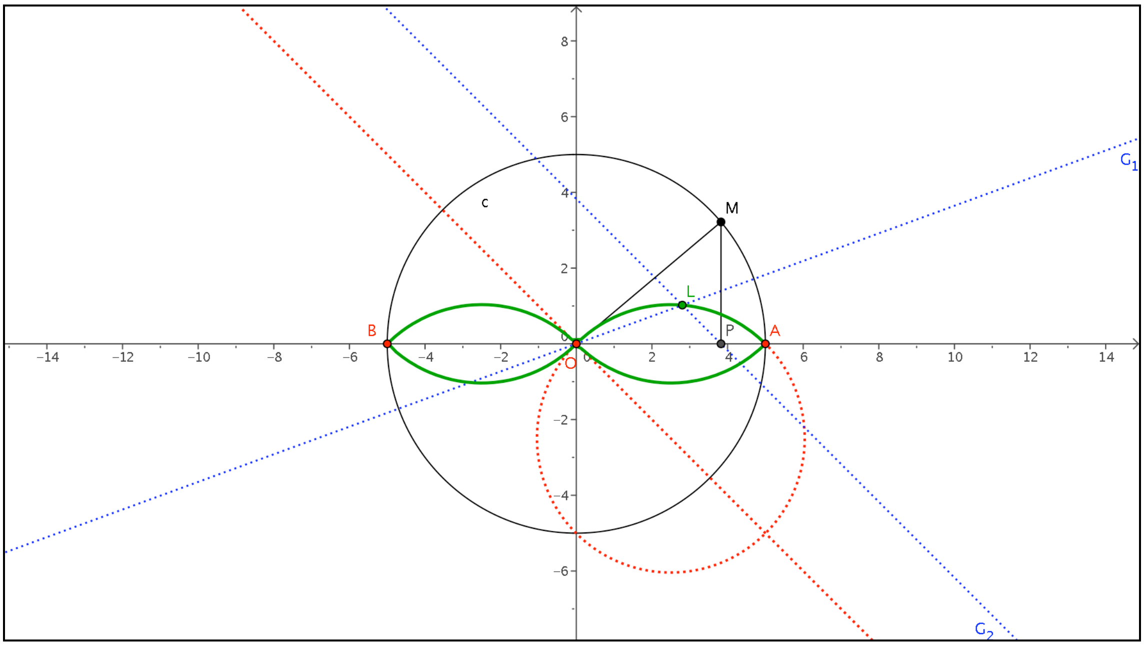



figure 4