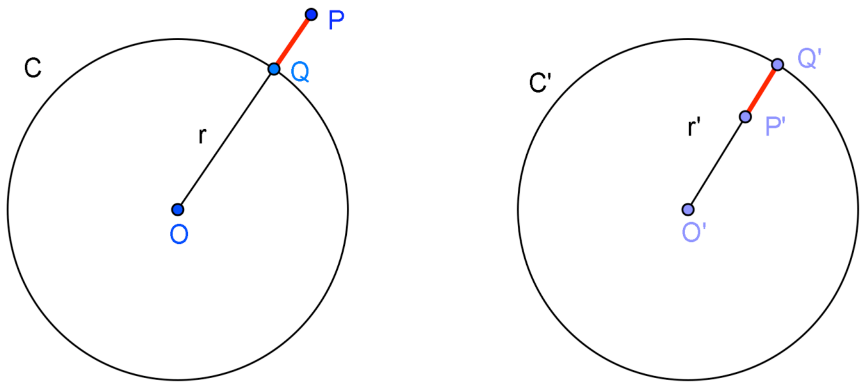
Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axe X et Y, on considère deux cercles C1 et C2. C1 passe par l'origine et est centré en (3;0). C2 est centré à l'origine et passe par (0;4).
Déterminez une équation cartésienne du lieu géométrique des points situés à égale distance des deux cercles. Quelle est la nature de ce lieu?

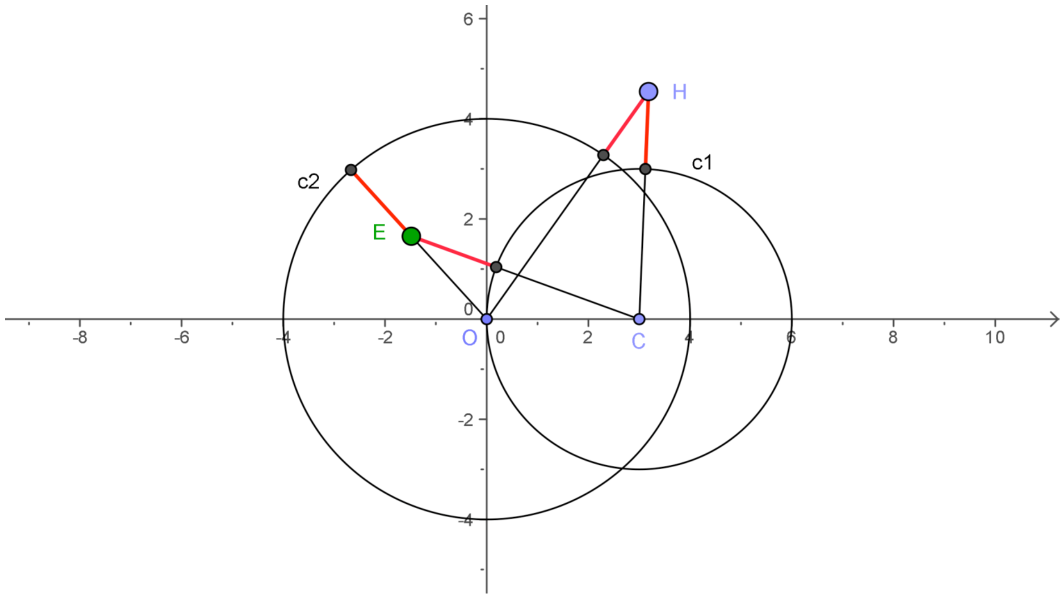
La distance du point P au cercle C = la distance de P au point Q de C, le plus proche de P.



d(P,C) = d(P,O) - r

d(P',C') = r' - d(P',O')

En bref : $d(P,C) = \left| \, r - d(P,O) \, \right|$



P de coordonnée (x,y) appartient au lieu ssi d(P,C1) = d(P,C2)

ssi $\left| \, r_1 - d(P,C) \, \right| = \left| \, r_2 - d(P,O) \right|$

ssi $\left| \, 3 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \, \right| = \left| \, 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \, \right|$

ssi $\boxed{3 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}}$ (cas 1) ou $\boxed{3 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} - 4}$ (cas 2)

Calculons :

(cas 1) $3-\sqrt{(x-3)^2+y^2}=4-\sqrt{x^2+y^2}$ ssi $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}-1$

ssi $(x-3)^2+y^2=x^2+y^2+1-2\sqrt{x^2+y^2}$ ssi …

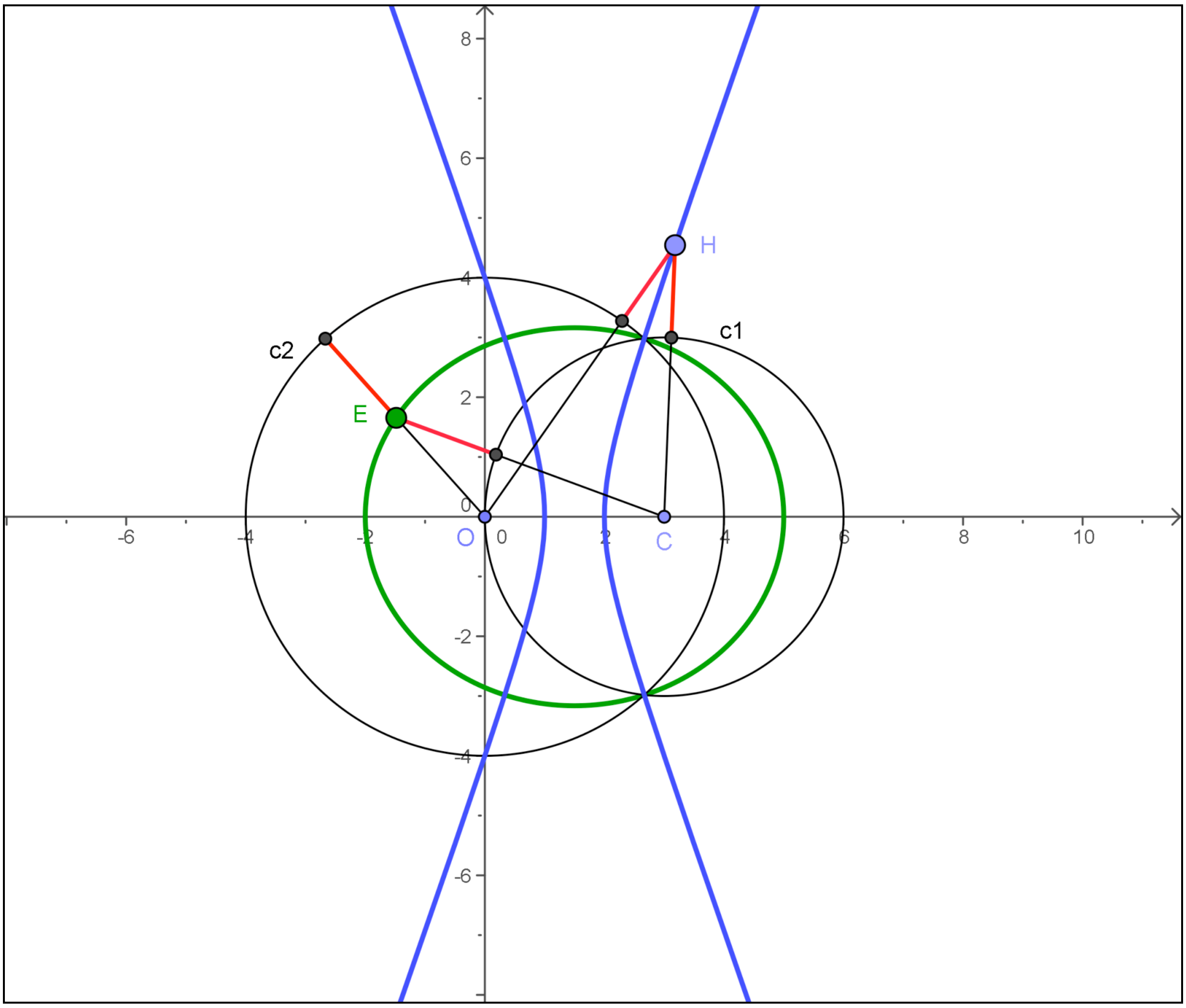
… ssi $8x^2-y^2-24x+16=0$

(cas2) $3-\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}-4$ ssi $7-\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

ssi $49+x^2+y^2-14\sqrt{x^2+y^2}=(x-3)^2+y^2$ ssi …

… ssi $40x^2+49y^2-120x-400=0$

Le cas1 fournit une hyperbole dont les foyers sont les centres des cercles et dont $k = r_2 - r_1$
Le cas2 fournit une ellipse dont les foyers sont les centres des cercles et dont $k = r_1 + r_2$



Visiblement la branche « gauche » de l'hyperbole est parasite.
Le lieu recherché est donc la réunion d'une ellipse et d'une demie-hyperbole.