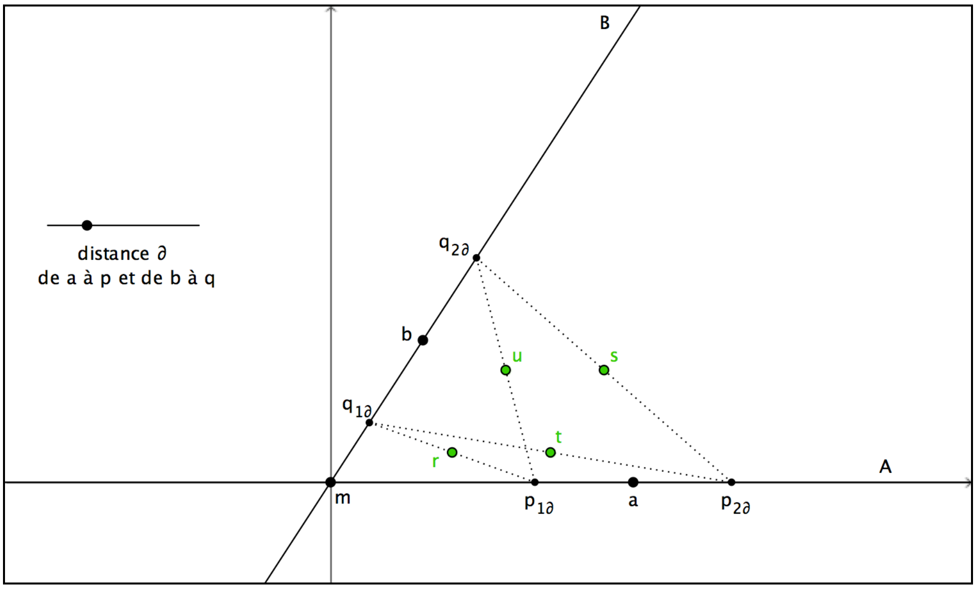
EX2 :	Voici deux droites A et B qui se coupent au point m, et deux points a et b appartenant respectivement aux droites A et B. On examine l'ensemble des points p et q tels que $p \in A$, $q \in B$ et $d(a,p) = d(b,q)$. Déterminez le lieu du milieu du segment [pq].

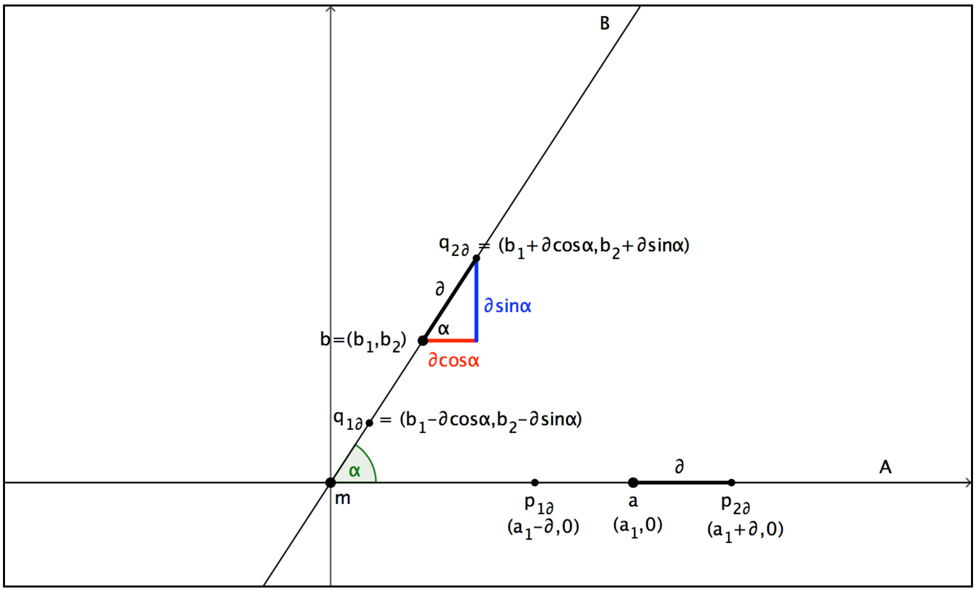
Choisissons un repère $\mathcal{R}$ tel que A = l'axe X, a = (a,0), $b = (b_1, b_2)$
et plaçons les points p et q comme ils sont décrits dans l'énoncé.
Ces points sont «doubles» et situés à la distance ∂ (variable) de a et de b : on les note $p_{1\partial}, p_{2\partial}, q_{1\partial}, q_{2\partial}$.
Ils définissent quatre segments et donc quatre milieux : r, s, t, u.



Calculons les coordonnées de ces milieux.

Pour ce faire, on appelle α l'angle des droites A et B. $\quad * \ \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{b_2}{b_1}$

On trouve immédiatement les coordonnées des points p et q.



Les milieux sont donc :

$$r=\left(\frac{b_1-\partial\cos\alpha+a_1-\partial}{2},\frac{b_2-\partial\sin\alpha}{2}\right)=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{b_2}{2}\right)-\frac{\partial}{2}(1+\cos\alpha,\sin\alpha)$$

$$s=\left(\frac{b_1+\partial\cos\alpha+a_1+\partial}{2},\frac{b_2+\partial\sin\alpha}{2}\right)=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{b_2}{2}\right)+\frac{\partial}{2}(1+\cos\alpha,\sin\alpha)$$

$$t=\left(\frac{b_1-\partial\cos\alpha+a_1+\partial}{2},\frac{b_2-\partial\sin\alpha}{2}\right)=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{b_2}{2}\right)-\frac{\partial}{2}(-1+\cos\alpha,\sin\alpha)$$

$$u=\left(\frac{b_1+\partial\cos\alpha+a_1-\partial}{2},\frac{b_2+\partial\sin\alpha}{2}\right)=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{b_2}{2}\right)+\frac{\partial}{2}(-1+\cos\alpha,\sin\alpha)$$

En faisant varier ∂ qui est positif, on observe que les points r et s définissent l'ensemble

$$L_1=\left\{\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{b_2}{2}\right)+\lambda(1+\cos\alpha,\sin\alpha)\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

et que les points t et u définissent

$$L_2=\left\{\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{b_2}{2}\right)+\lambda(-1+\cos\alpha,\sin\alpha)\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Le lieu recherché est $L=L_1\cup L_2$.

Interprétation des résultats.

$\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{b_2}{2}\right)$ est le milieu μ du segment [ab].

L_1 est la droite passant par μ et de vecteur directeur $(1+\cos\alpha,\sin\alpha)$

L_2 est la droite passant par μ et de vecteur directeur $(-1+\cos\alpha,\sin\alpha)$

Ces droites sont perpendiculaires car leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
En effet :

$$\big((1+\cos\alpha,\sin\alpha)\big|(-1+\cos\alpha,\sin\alpha)\big)=-1+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=0$$

La pente de L_1 égale $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\underset{\substack{\text{duplication}\\\text{et Carnot}}}{=}\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

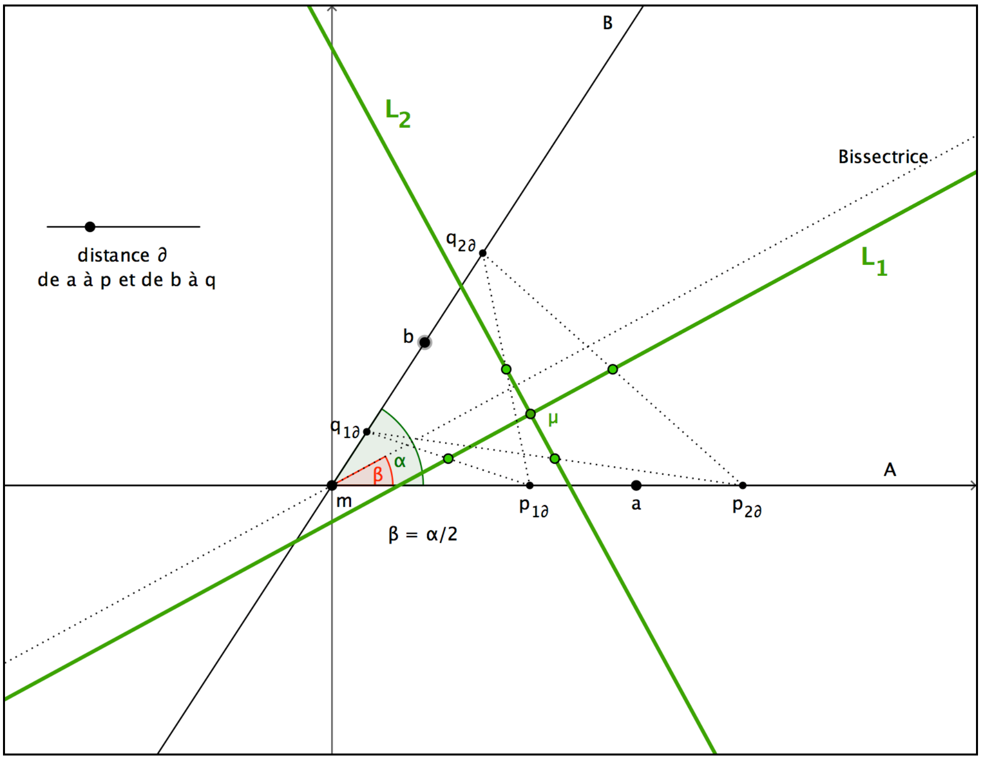
La droite L_1 forme donc avec l'horizontale A un angle égal à $\dfrac{\alpha}{2}$.

En conclusion :

L_1 est la droite qui passe par le milieu de [ab] et qui est parallèle à la bissectrice de {A,B}.

L_2 est perpendiculaire à L_1 et passe aussi par le milieu de [ab].

Et comme d'habitude, un joli dessin pour clôturer l'exercice.


B
L2
Bissectrice
L1
q2∂
distance ∂
de a à p et de b à q
b
μ
q1∂
α
β
A
m
p1∂
a
p2∂
β = α/2