Lieux géométriques

Lieu de points = ensemble de points

EX1 : Déterminer, dans le plan cartésien, le lieu des points équidistants de deux points donnés p et q.

L'élève perspicace déclare immédiatement que ce lieu est la …
et nous le félicitons pour sa bonne réponse.

Comment s'y prendre si la réponse semble moins évidente ?

Deux méthodes :

(1) La méthode de TRADUCTION :
elle consiste à traduire la condition de définition du lieu.

Dans le cas qui nous occupe, le lieu est l'ensemble

$$\begin{aligned}
L &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, d(x,p) = d(x,q) \right\} \\
&= \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2} = \sqrt{(x_1-q_1)^2+(x_2-q_2)^2} \right\} \\
&= \ldots \\
&= \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2(q_1-p_1)x_1 + 2(q_2-p_2)x_2 + p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 - q_2^2 = 0 \right\}
\end{aligned}$$

Ce lieu est une droite
passant par le milieu du segment [pq]
et perpendiculaire à la droite pq. (vérifiez-le)

Ainsi, L est la médiatrice du segment [pq].

<u>REM</u>: Ce qui importe dans ce genre de problème, ce n'est pas tellement l'équation du lieu, mais plutôt la nature du lieu (droite, cercle, …) et sa position par rapport aux objets qui l'entourent. Dès lors, si nous voulons mener à bien l'étude des lieux, nous devons disposer d'une bonne vision géométrique et être capables d'analyser des équations. Nous aurons donc tout intérêt à essayer d'obtenir des équations les plus simples possibles et nous pouvons y arriver en choisissant judicieusement le repère dans lequel nous allons travailler.

Revenons à notre exercice.

Nous pouvons choisir un repère métrique dans lequel $p = (-1,0)$ et $q = (1,0)$.
Le lieu s'exprime alors de la manière suivante :

$$L = \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1-1)^2 + x_2^2} \right\} = \ldots = \left\{ (x_1,x_2) \,\middle|\, x_1 = 0 \right\}$$

Son équation est bien jolie.
Tout le monde voit que L est la médiatrice du segment [pq].

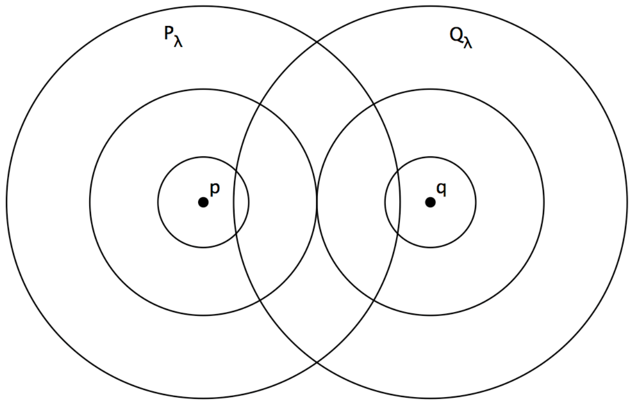
(2) La méthode des GENERATRICES :
elle consiste à « engendrer » le lieu au moyen de deux familles de courbes.

Mettons cette méthode en oeuvre pour résoudre EX1.
On considère :

la famille P_λ des cercles de centre p et de rayon λ (λ réel)

et la famille Q_λ des cercles de centre q et de rayon λ.

Pour chaque valeur réelle de λ, l'intersection $P_\lambda \cap Q_\lambda$ fournit 0, 1 ou 2 points du lieu recherché.



Travaillons encore dans un repère métrique où $p = (-1,0)$ et $q = (1,0)$.
Exprimons les équations des génératrices P_λ et Q_λ :

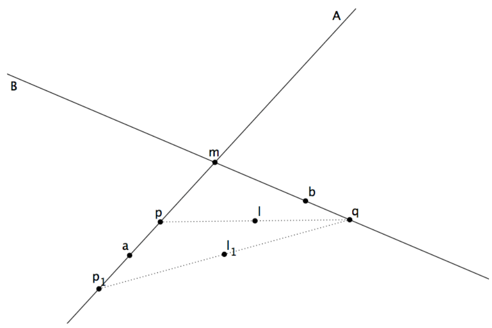
$P_\lambda \equiv (x_1 + 1)^2 + x_2{}^2 = \lambda^2$

$Q_\lambda \equiv (x_1 - 1)^2 + x_2{}^2 = \lambda^2$

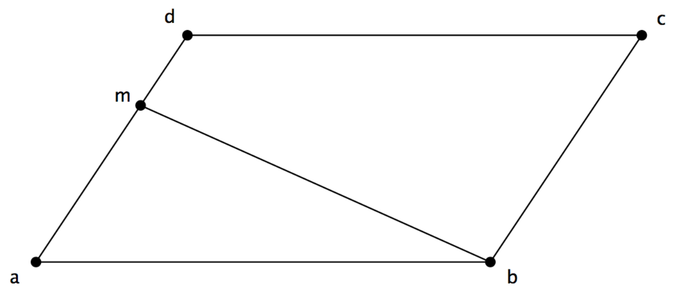
Le lieu demandé est $L = \{x \mid x \in P_\lambda \cap Q_\lambda \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}\}$

* L'équation cartésienne de ce lieu s'obtient en éliminant le paramètre λ des équations des génératrices.
Ainsi, $L \equiv (x_1 + 1)^2 + x_2{}^2 = (x_1 - 1)^2 + x_2{}^2$ ou encore $L \equiv x_1 = 0$.
Nous ne répéterons plus la conclusion.

EX2 : Voici deux droites A et B qui se coupent au point m, et deux points a et b appartenant respectivement aux droites A et B.
On examine l'ensemble des points p et q tels que $p \in A$, $q \in B$ et $d(a,p) = d(b,q)$.
Déterminez le lieu du milieu du segment [pq].
(on résoudra cet exercice à l'oeil nu, par traduction et par la méthode des génératrices)



EX3 : Sur le segment [ad] d'un parallélogramme abcd, on considère un point mobile m.
Quel est le lieu du milieu du segment [mb] ?



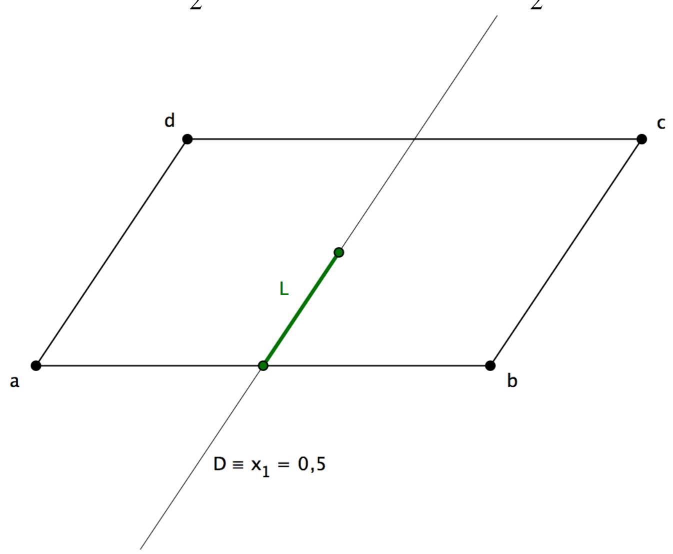
Cette question ne fait appel qu'à la notion de parallélisme. Il est donc permis de choisir un repère affine et non métrique. Prenons un repère $\mathcal{R}$ tel que a = (0,0), b = (1,0), d = (0,1).

$*\ \ m \in [ad] \Leftrightarrow m = (0,\lambda)$ et $0 \le \lambda \le 1$

(1) Méthode de traduction

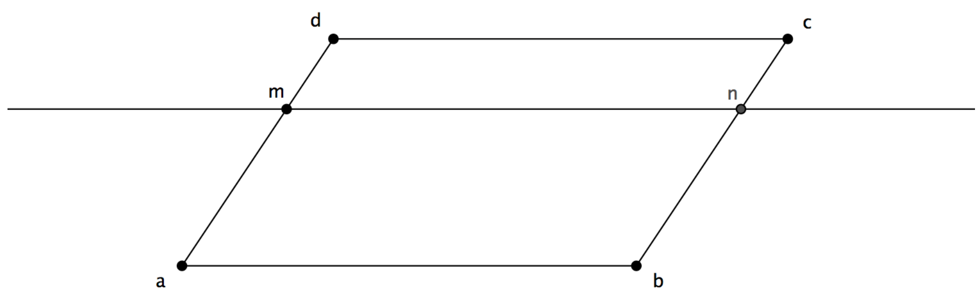
$$L = \{x \in \pi \,|\, x \text{ est milieu de } [mb]\} = \left\{\left(\frac{1}{2},\frac{\lambda}{2}\right) \middle| 0 \le \lambda \le 1\right\}$$

C'est le segment de la droite $D \equiv x_1 = \frac{1}{2}$ limité aux ordonnées 0 et $\frac{1}{2}$.



(2) Méthode des génératrices

Traçons par le point m une droite parallèle à ab
et appelons n le point d'intersection de cette droite avec bc.



Pour obtenir le milieu du segment [mb], il suffit de déterminer le point d'intersection des droites mb et na puisque les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

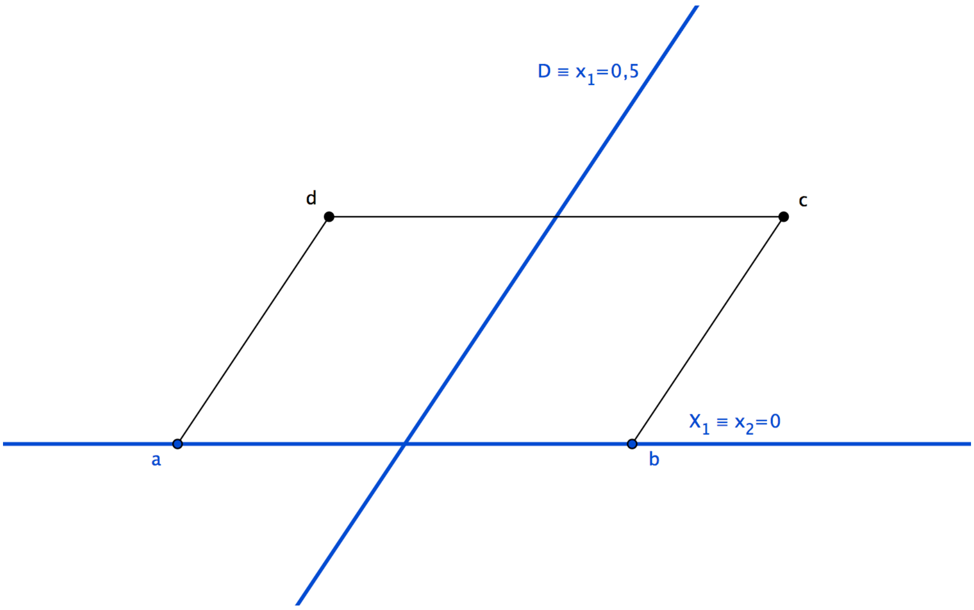
Définissons donc comme première génératrice, la droite mb
et comme deuxième génératrice, la droite na.

Ainsi, $G_{1,\lambda} \equiv \lambda x_1 + x_2 - \lambda = 0$ et $G_{2,\lambda} \equiv \lambda x_1 - x_2 = 0$

Eliminons λ des équations de ces génératrices ce qui nous donne l'équation du lieu :

$$\mathcal{L} \equiv (2x_1 - 1)x_2 = 0$$

Cette équation représente la réunion des droites $X_1 \equiv x_2 = 0$ et $D \equiv x_1 = 0,5$.



Manifestement, il y a dans ce lieu $\mathcal{L}$ des points qui ne répondent pas à la question (par exemple les points a et b). De tels points sont dits PARASITES.

On détermine le lieu parasite en raisonnant sur le dessin ou en tenant compte, dans les calculs, des conditions initiales, ici : $0 \leq \lambda \leq 1$. Faisons-le …

$$\begin{array}{l} \lambda x_1 - x_2 = 0 \\ \lambda x_1 + x_2 = \lambda \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x_2 = \lambda \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{array} \Rightarrow 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}$$

De la droite $x_1 = 0,5$ il ne faut donc retenir que les points dont l'ordonnée est située entre 0 et 0,5.
Les autres points de cette droite sont parasites.

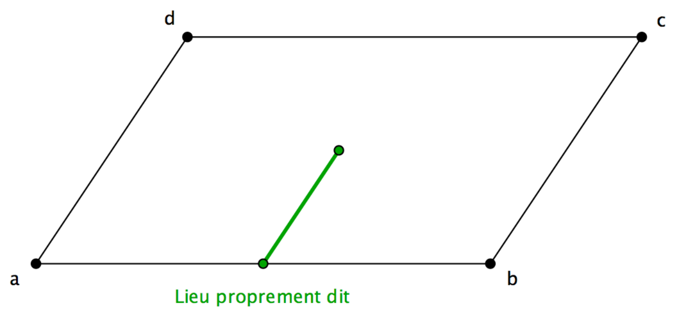
Et l'autre droite du lieu $\mathcal{L}$?
On l'obtient comme intersection des génératrices $G_{1,\lambda}$ et $G_{2,\lambda}$ pour $\lambda = 0$.

Les points du lieu obtenus par des génératrices confondues, pour une même valeur du paramètre λ, sont dits SINGULIERS.

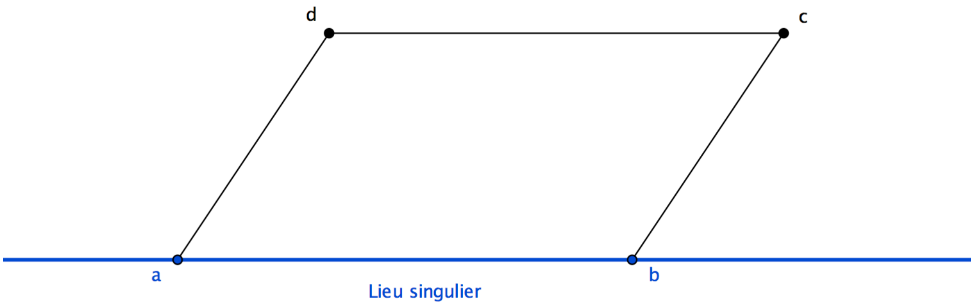
Ici, le lieu singulier est la droite $X_1 \equiv x_2 = 0$ car $X_1 = G_{1,0} = G_{2,0}$

∗ le point $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ mis à part, tous les points singuliers sont parasites.

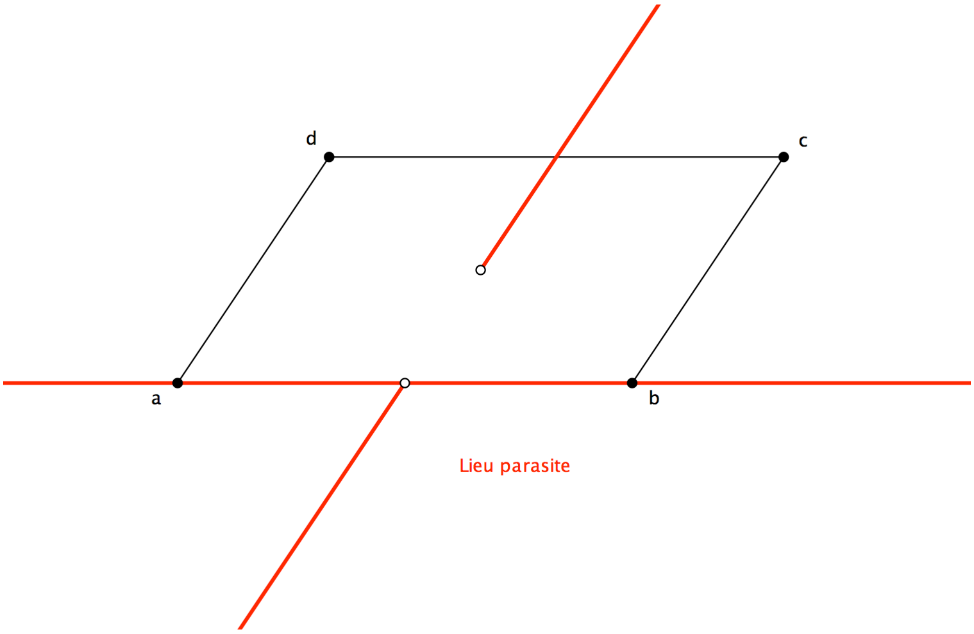
En couleurs :



d
c
a
b
Lieu proprement dit



d
c
a
b
Lieu singulier



d
c
a
b
Lieu parasite