Asymptotes

0. Définition

☺ Asymptote $\triangleq$ droite tangente à une courbe en un point situé à l'infini ☺

EX 1: Cette définition tient compte du fait que vous avez entendu parler du plan euclidien et du plan de Riemann. Mais le plan de Riemann n'est pas au programme, c'est bien dommage.

EX 2: Dans la suite du cours nous étudierons les asymptotes de courbes fonctionnelles, et en particulier de graphes de fonctions numériques réelles.

1. Asymptote verticale

La droite d'équation $x = k$ (où $k \in \mathbb{R}$) est asymptote verticale de la fonction f
ssi $\lim\limits_{x \to k^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = \pm\infty$

EX 3: Le OU de l'encadré ci-dessus est l'opérateur logique habituel. Il est NON EXCLUSIF. Dans les textes administratifs, les gens peu habitués à la pratique des mathématiques le remplacent par « et/ou ».

EX 4: Il y a des chances de trouver une asymptote verticale en les points qui n'appartiennent pas au domaine de définition de f mais qui adhèrent à celui-ci.

EX 5 : La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ admet la droite d'équation $x = 0$ comme AV.

EX 6: La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ admet la droite d'équation $x = 3$ comme AV.

EX 7: La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ admet les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ comme AV.

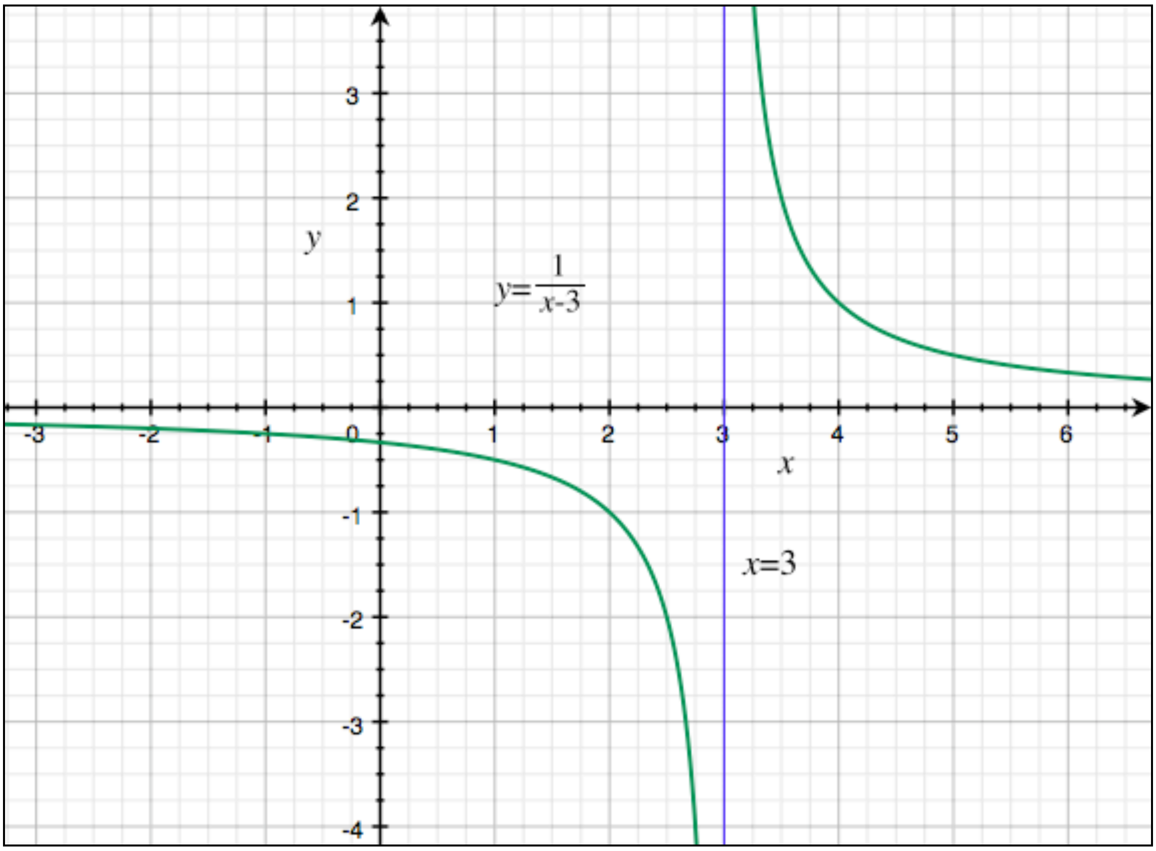
EX 8: La fonction $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$ admet seulement la droite $x = 2$ comme AV.
En x = 1, il y a un trou.

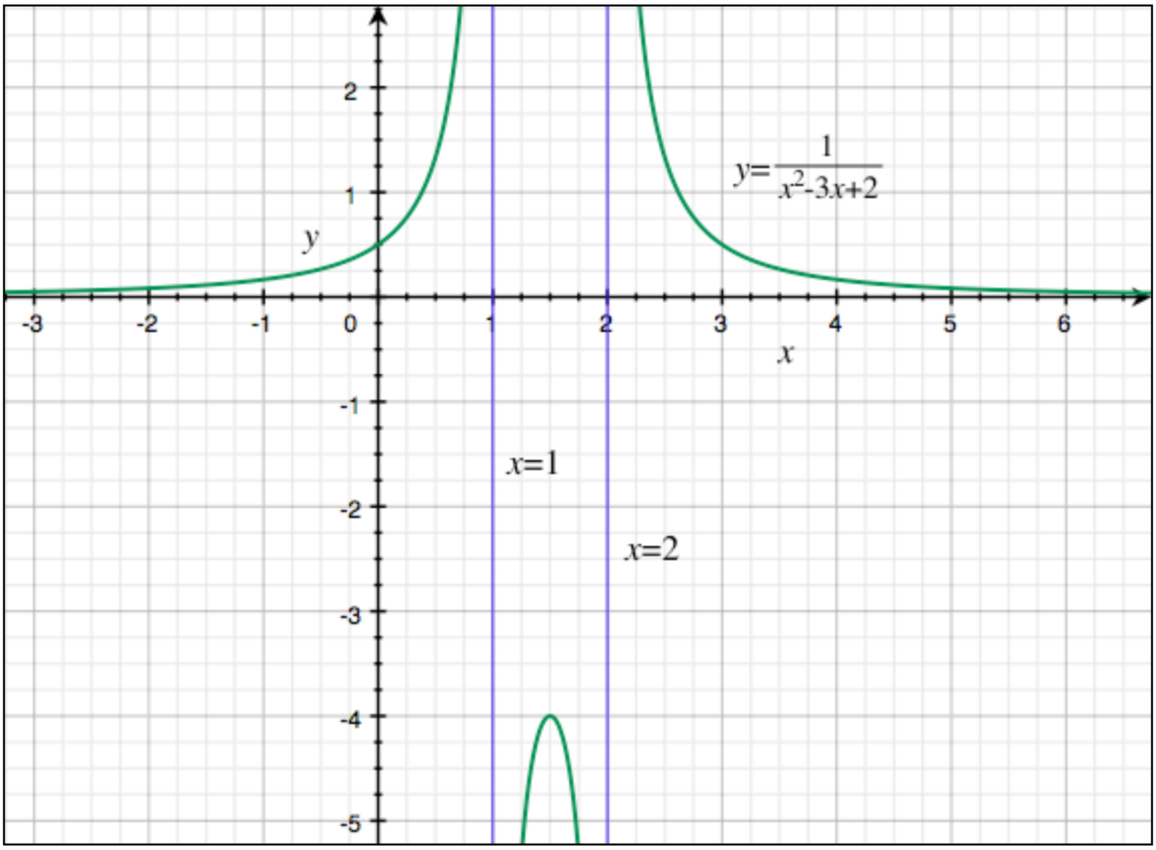
EX 9: Si f(x) est une fraction, alors il y a une AV en les valeurs de x qui annulent le dénominateur, sans annuler le numérateur.

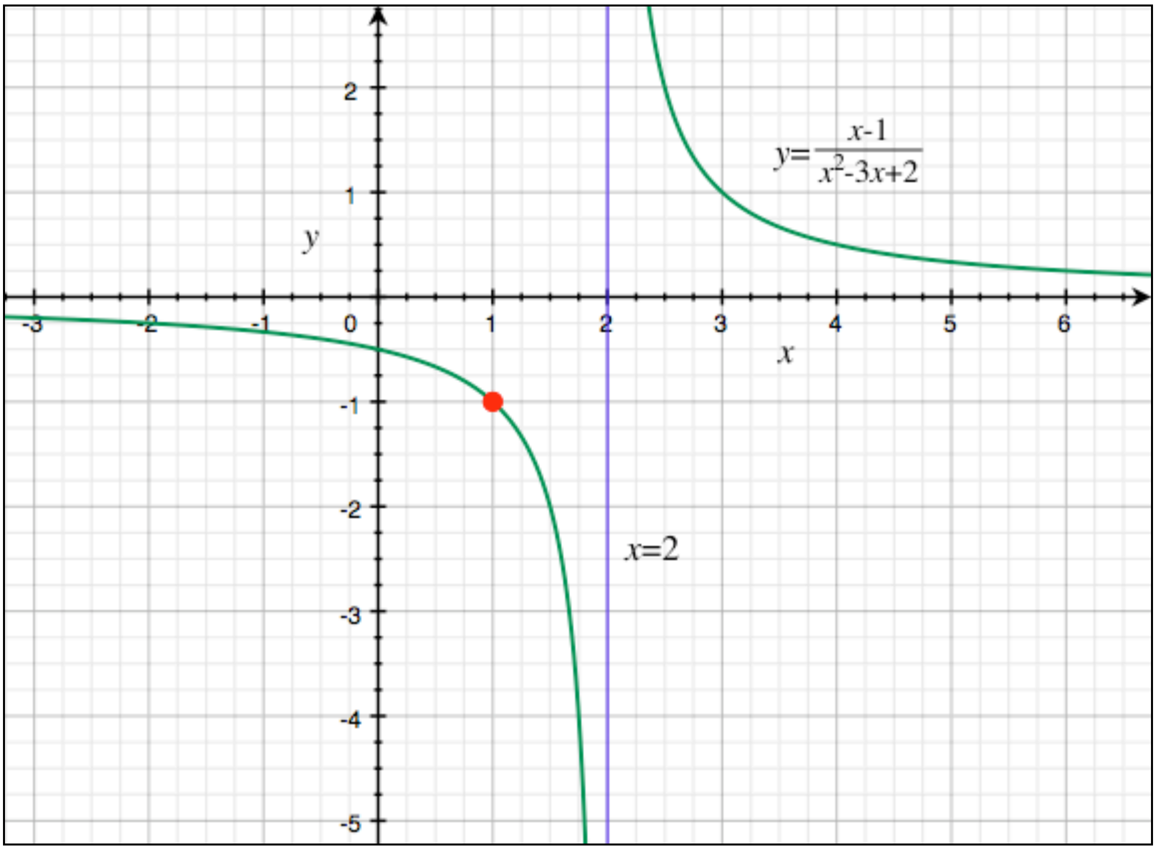
EX 10: Les indéterminations du type $\dfrac{k \in \mathbb{R}_0}{0}$ conduisent à une AV,

celles du type $\dfrac{0}{0}$ doivent être examinées de plus près.

EX 11:   Graphes







2. Asymptote horizontale

La droite d'équation $y = b$ est AH de la fonction f en $+\infty$ ssi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \ (b \in \mathbb{R})$

La droite d'équation $y = b$ est AH de la fonction f en $-\infty$ ssi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \ (b \in \mathbb{R})$

EX 12: La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ admet la droite d'équation $y = 0$ comme AH en $+\infty$ et en $-\infty$.

EX 13: La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ admet la droite d'équation $y = 0$ comme AH en $+\infty$ et en $-\infty$.

EX 14: La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ admet la droite $y = 0$ comme AH en $+\infty$ et en $-\infty$.

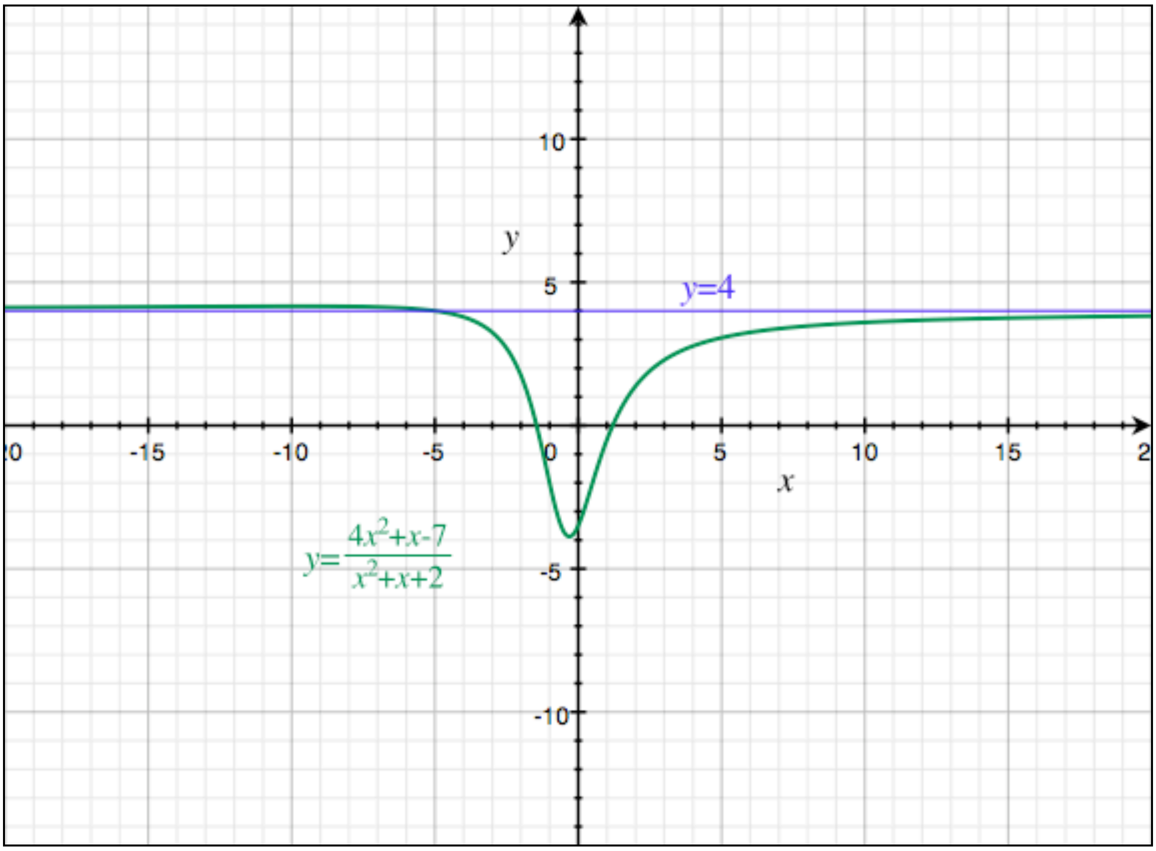
EX 15: La fonction $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$ admet la droite $y = 0$ comme AH en $+\infty$ et en $-\infty$.

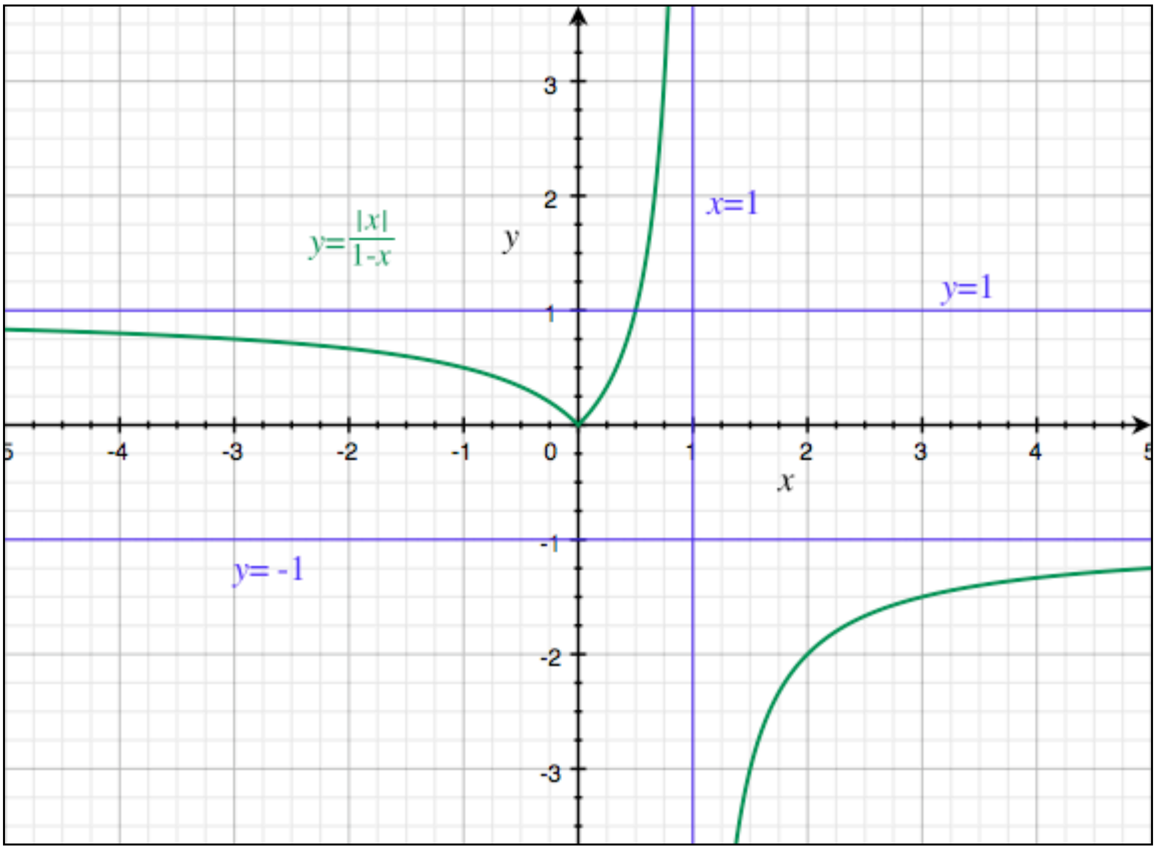
EX 16: La fonction $f(x) = \dfrac{4x^2 + x - 7}{x^2 - 3x + 2}$ admet la droite $y = 4$ comme AH en $+\infty$ et en $-\infty$.

EX 17: La fonction $f(x) = \dfrac{|x|}{1-x}$ admet la droite $y = 1$ comme AH en $-\infty$
et la droite $y = -1$ comme AH en $+\infty$.

EX 18: Comment reconnaître à l'oeil nu des fonctions qui admettent une AH ?

EX 19: Graphes



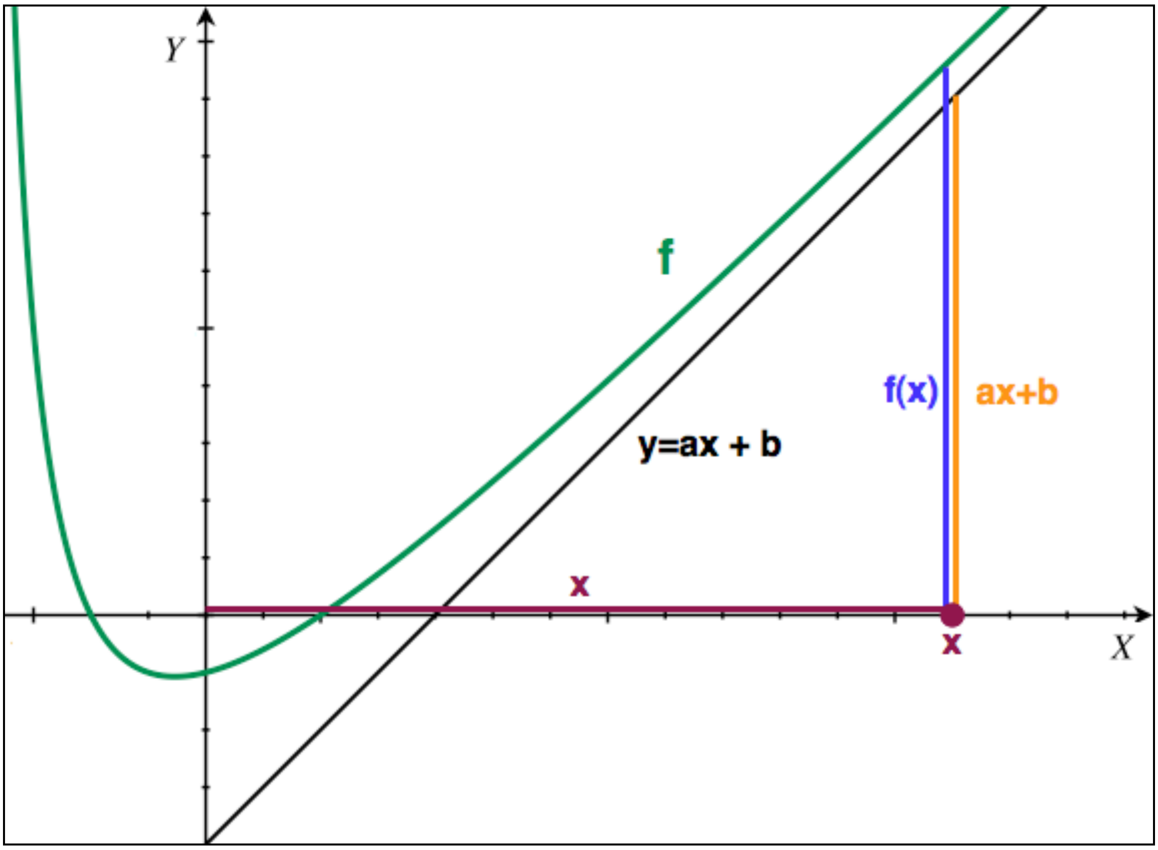


3. Asymptote oblique

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique de la fonction f

ssi $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - a\cdot x\right)$, $\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$

EX 20: Illustration et explication



On observe que si x tend vers l'infini, alors f(x) tend vers ax + b.

Par conséquent, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $\dfrac{ax+b}{x}$ c'est-à-dire vers a

et $f(x) - ax$ tend vers b.

EX 21: Comment reconnaître à l'oeil nu des fonctions qui admettent une AO ?

EX 22: La fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x+3}$ admet la droite d'éq $y = x - 1$ comme AO en $+\infty$ et en $-\infty$.

EX 23: La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ admet la droite d'équation $y = -x + \dfrac{3}{2}$ comme AO en $-\infty$

et la droite $y = x - \dfrac{3}{2}$ comme AO en $+\infty$

EX 24: Graphes