Voici la fonction $f(x)=x^2\operatorname{Arctg}\dfrac{1}{1+x}$

On demande de rechercher ses asymptotes.

Pour l'éventuelle asymptote verticale, il faut aller fouiner du coté de $x = -1$ car $\operatorname{dom}f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

On voit assez facilement que $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x^2\operatorname{Arctg}\dfrac{1}{1+x}=-\dfrac{\pi}{2}$ et que $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x^2\operatorname{Arctg}\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{\pi}{2}$.

Il n'y a donc pas d'asymptote verticale.

Pas d'asymptote horizontale non plus car

$$\lim_{x\to\infty} x^2\operatorname{Arctg}\frac{1}{1+x}=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} x^2\operatorname{Arctg}\frac{1}{1+x}=-\infty.$$

Pour obtenir ces résultats, on applique la règle de l'Hospital à $f(x)=\dfrac{\operatorname{Arctg}\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x^2}}$

Par contre il y a une asymptote oblique en $+\infty$ et aussi en $-\infty$.

Son équation s'écrit y = ax + b avec

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{Arctg}\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{(1+x)^2}}\cdot\frac{-1}{(1+x)^2}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2+1}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x+2}=1$$

$$\text{et } b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(x^2\operatorname{Arctg}\frac{1}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{Arctg}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{0}$$

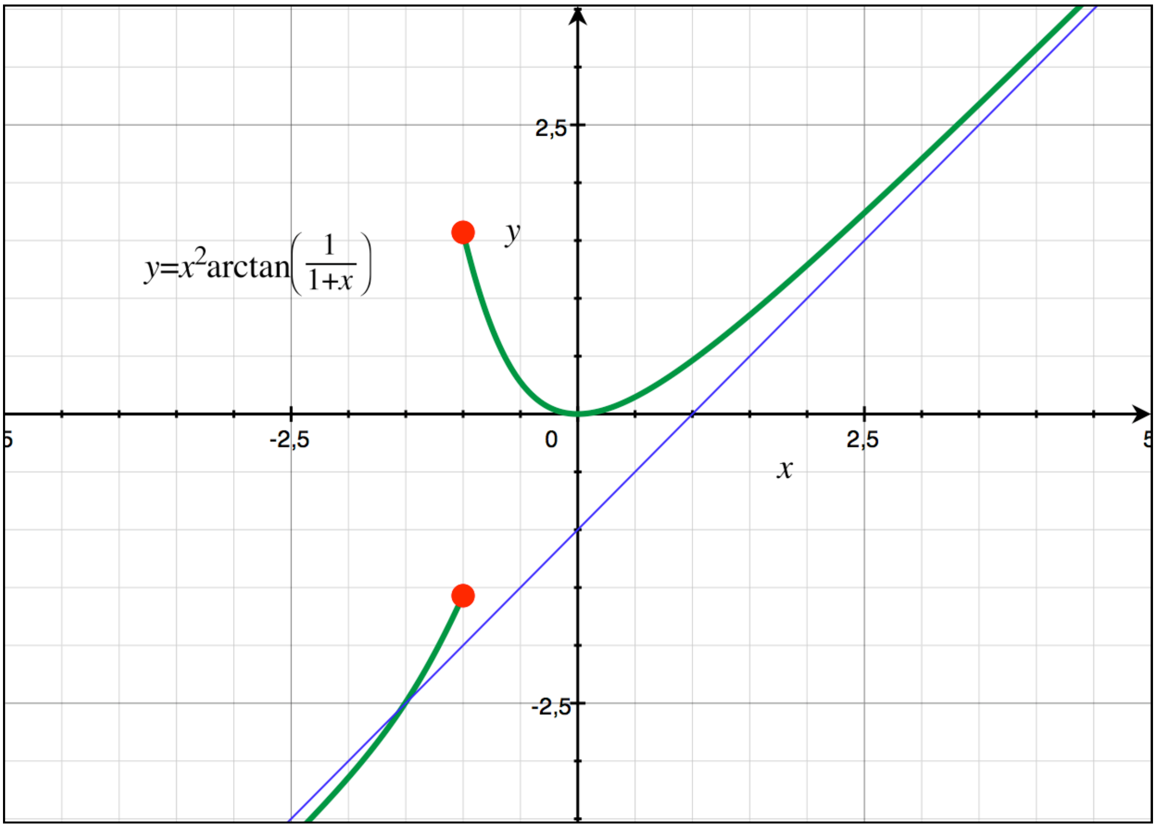
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{(1+x)^2}}\cdot\frac{-1}{(1+x)^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{-2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2+1}+\frac{1}{x^2}}{\frac{-2}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+2x+2}\right)\frac{x^3}{(-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+2)x^3}{x^2(x^2+2x+2)(-2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2x}{-2x^2-4x-4}=-1.$$

L'asymptote oblique a donc pour équation y = x – 1.

Et voici pour terminer un joli graphe cartésien de la fonction proposée :



et si on regarde de plus loin :