Calcul des limites.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a un sens
ssi
$a \in$ domf et a n'est pas isolé dans domf ou $a \notin$ domf et a adhère à domf
ssi
a n'est pas isolé dans domf$\cup\{a\}$

(contexte)

la limite de f au point a = la valeur au point a de la prolongée continue de f au point a

(définition)

□ Si f est une fonction continue au point a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. ■

(proposition)

Cette propriété justifie le fait que l'on fasse un premier essai lors du calcul de la limite d'une fonction continue en un point. Il arrive souvent que ce premier essai soit infructueux dans la mesure où il donne une « forme d'indétermination ». Cependant, le type d'indétermination que l'on obtient, fournit une excellente indication sur la méthode à appliquer pour « lever l'indétermination ».

Et voici, pour le grand bonheur de certains, des … recettes de cuisine !

➔ Limite d'une fonction polynôme $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i x^i$ où $n \in N_0$, $p_n \neq 0$

- ♦ en un réel a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (puisque f est continue)
- ♦ en $+\infty$ ou $-\infty$: c'est le terme de plus grande puissance qui « l'emporte », c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = p_n(+\infty)^n$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = p_n(-\infty)^n$

➔ Limite d'une fonction fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n} p_i x^i}{\sum\limits_{j=0}^{m} q_j x^j}$ où m et $n \in N_0$, p_n et $q_m \neq 0$

- ♦ en un réel a

  Le premier essai donne un résultat du type $\dfrac{p}{q}$ où p et q sont des nombres réels

  - soit $q \neq 0$ et alors c'est terminé

- soit q = 0 et alors on se trouve devant deux sous-cas :

  - p = 0. Il faut mettre (x – a) en évidence au numérateur et au dénominateur. Simplifier par (x – a) afin d'obtenir une prolongée continue de f au point a et faire un deuxième essai.

  - p ≠ 0. Il faut effectuer un tableau de signes afin de connaître le signe de f aux environs de a. Suivant le cas + | + ou – | – ou (– | + ou + | –), la limite sera +∞ ou –∞ ou n'existera pas.

♦ en + ∞ ou – ∞

Appelons respectivement N et D les numérateur et dénominateur de f(x).
Trois cas se présentent :

- degré N < degré D : la limite de f en a est nulle.
- degré N = degré D : la limite de f en a égale le quotient p_n / q_m
- degré N > degré D : la limite de f en a est infinie. Il faut bien observer m, n, p_n et q_m pour déterminer si c'est + ∞ ou – ∞.

➔ Limite d'une expression f(x) contenant des irrationnalités

♦ en un réel a

- si le premier essai est fructueux, on s'arrête là

- sinon c'est que le contexte n'est pas propice et que la limite n'a pas de sens ou bien que l'on se trouve devant une indétermination du type k / 0.

  - si k = 0, on utilise les binôme, trinôme… conjugués afin de faire disparaître les radicaux embêtants et de parvenir à mettre (x – a) en évidence au numérateur et au dénominateur etc… (cfr fractions rationnelles)

  - si k ≠ 0, on se trouve devant une limite infinie et c'est un tableau de signes qui nous tirera d'affaire (cfr fractions rationnelles)

♦ en + ∞ ou – ∞

Dans ce cas, il faut suivre IMPERATIVEMENT l'algorithme suivant :

1. Vérifier le contexte et s'il convient, faire un premier essai.
   Si l'essai donne satisfaction, on s'arrête là, s'il donne une forme d'indétermination, on passe à l'étape 2.

2. Mettre la plus grande puissance de x du numérateur en évidence, ainsi que celle de l'éventuel dénominateur. Simplifier ces puissances de x et faire un deuxième essai.
   Si l'essai donne satisfaction, on s'arrête là, s'il échoue, on passe à l'étape 3.

3. Reprendre l'expression de départ. Multiplier numérateur N et dénominateur D par les binômes, trinômes… conjugués de N et D. Effectuer les calculs ainsi que les éventuelles simplifications. Mettre ensuite les plus grandes puissances de x des nouveaux N et D en évidence. Simplifier ces puissances et faire un troisième essai. Cet essai doit être concluant. S'il échoue, c'est que l'on a commis une erreur en cours de route et il faut reprendre l'algorithme à son point de départ.