

Calcul des limites

1. Après avoir vérifié que les limites suivantes ont un sens, démontrez que :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{3}x + 3\right) = 4; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x - 3|} = +\infty.$$

2. Etablissez le graphe cartésien de la fonction suivante. Calculez ensuite son éventuelle limite au point 2 et justifiez votre réponse.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2 \\ -x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

3. Pour chacun des exercices suivants, vérifiez si la limite a un sens, ensuite calculez-la :

$$\text{a) } \lim \frac{(4 - x^2)(3 + x)}{(x + 2)(x - 3)(x^2 + 2)} \text{ aux points } -3, -2, 3, -\infty \text{ et } +\infty$$

$$\text{b) } \lim \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \text{ en } 1, 2, -\infty \text{ et } +\infty$$

$$\text{c) } \lim \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \text{ en } 1, -1, -\infty \text{ et } +\infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\text{f) } \lim \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \text{ en } 1, -\infty \text{ et } +\infty$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a + 1)x + a}{x^3 - a^3} \text{ (où } a \text{ est un réel fixé)}$$

$$\text{h) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$$

4. Calculez :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - 3}{x - 3}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{3 - \sqrt{3x}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{3x - 2}}{\sqrt{2x} - 2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2}$$

5. Pour chacune des fonctions du numéro 4, recherchez les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

6. Calculez les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{x^2 + 3x - 9} - (x + 2) & \text{b) } \sqrt{x^2 - 3x + 7} - \sqrt{x^2 + 3x - 7} \\ \text{c) } \sqrt{3x^2 - 4x + 1} - \sqrt{2x^2 + 3x - 1} & \text{d) } x + \sqrt[3]{2 - x^3} \end{array}$$

7. Calculez les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x - \sqrt{x^2 + 2x + 3}}{2x - \sqrt{4x^2 + 5x}} & \text{b) } \frac{x - \sqrt[3]{x^3 + 2x + 3}}{2x - \sqrt[3]{8x^3 + 5x}} \end{array}$$

8. Calculez :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 3\pi x}{\sin \pi x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ \text{f) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \\ \text{h) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} \end{array}$$

9. Calculez encore :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}} \end{array}$$

Et voici à titre d'information :

- Les réponses de l'exercice n° 9 sont respectivement :

$$0, 1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{(n^2 - m^2)}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{\pi}, -\frac{1}{4}, \pi.$$

- L'usage de l'excellent livre, dont les exercices du n° 9 sont extraits, vous est vivement recommandé. Il s'agit du *Recueil d'Exercices et de Problèmes d'Analyse Mathématique* par B. Démidovitch, publié aux Editions de Moscou.