

La fonction exponentielle

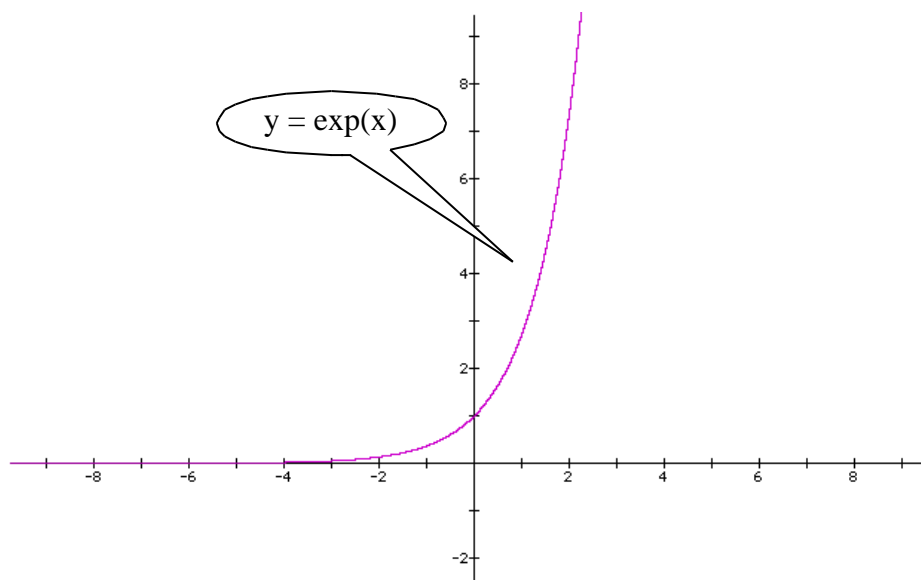
§1. Définition

La fonction exponentielle ou exponentielle népérienne est notée **exp** et définie par $\exp = \ln^{-1}$. Autrement dit, elle est l'inverse de la fonction logarithme népérien.

§2. Propriétés

- $\exp 1 = e$ et $\exp 0 = 1$
- \exp est un isomorphisme strictement croissant, continu et dérivable du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe (\mathbb{R}^+, \cdot)
- $(\exp x)' = \exp x$
- $\forall q \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}: \exp(qx) = (\exp x)^q$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$
- $\forall q \in \mathbb{Q}: \exp q = e^q$
d'autre part, on définit : $\forall i \in \mathbb{I}: \exp i = e^i$. C'est notre première rencontre avec des exposants irrationnels.

§3. Graphe cartésien



ce graphe est le symétrique de celui de la fonction \ln par rapport à la droite d'équation $y = x$.

§4. Exercices

1. Résoudre dans \mathbb{R}

a) $e^{3x} = 1$

b) $e^{4x-1} = \frac{1}{e^3}$

c) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

d) $e^{2x} - e^x - 2 = 0$

e) $e^{4x} - 1 \geq 0$

f) $e^{2x} - 3e^x + 2 \leq 0$

2. Déterminez le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $e^{\sqrt{x+1}}$

b) $e^{\frac{x+2}{x-3}}$

c) $\sqrt{e^{2x} - 1}$

d) $\sqrt{\frac{e^x - 2}{e^x + 1}}$

3. Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

a) $e^{(x^3)}$

b) $(e^x)^3$

c) $e^{\sin x}$

d) $\sin e^x$

e) Arctge^x

f) $e^{\text{Arct}g x}$

g) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$

h) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Les fonctions g et h s'appellent respectivement cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique et sont notées $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$. Pour vous amuser, vous pourriez calculer la somme et la différence de leurs carrés. Vous trouveriez de jolis résultats.

4. Déterminez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f, au point d'abscisse p :

a) $p = 1$ et $f(x) = e^{4x} + 1$

b) $p = 2$ et $f(x) = \sqrt{e^{4x} + 1}$

5. Calculez les intégrales :

a) $\int (2x - 1)e^{x^2 - x} dx$

b) $\int \cos x e^{\sin x} dx$

c) $\int \frac{e^{\text{tg} x}}{\cos^2 x} dx$

d) $\int_{-1}^1 \text{ch} x dx$

e) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

f) $\int \text{sh}^2 x dx$

6. Le graphe cartésien de la fonction cosinus hyperbolique est appelé *chaînette*, vu son « look ».

a) Calculez l'aire géométrique de la surface S limitée par la chaînette, l'axe X et les verticales d'abscisses -1 et 1 .

b) Calculez le volume du solide de révolution engendré par la rotation de cette surface S autour de l'axe X et limité aux abscisses -1 et 1 .

c) Calculez l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation autour de l'axe X du morceau de chaînette situé au-dessus de l'intervalle $[-1, 1]$.