La fonction logarithme népérien

§1. Historique

Voyez notamment la feuille consacrée à John Néper.

§2. Définition

La fonction $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue. Elle admet donc une intégrale sur tout intervalle fermé inclus dans $\mathbb{R}_0^+$. En d'autres termes, $\forall\ [a,b] \subset \mathbb{R}_0^+ :\ \int_a^b \frac{1}{t}dt$ existe.

On définit alors $\ln : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \ln(x) \triangleq \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

§3. Propriétés

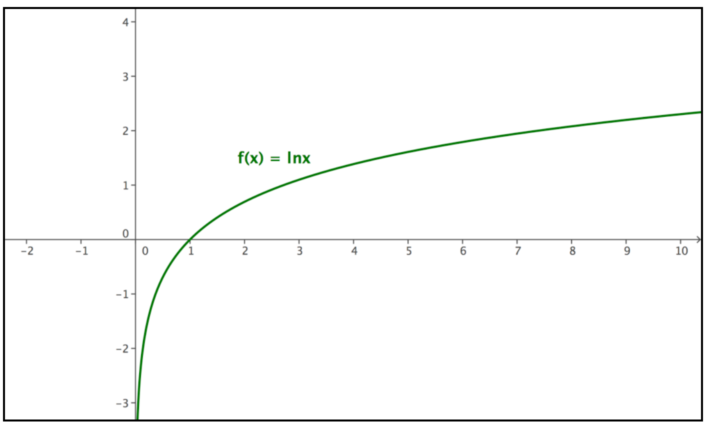
- $\ln(1) = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ :\ x > 1 \Rightarrow \ln(x) > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ :\ 0 < x < 1 \Rightarrow \ln(x) < 0$
- ln est un isomorphisme strictement croissant, continu et dérivable du groupe $(\mathbb{R}_0^+, \cdot)$ dans le groupe $(\mathbb{R},+)$
- $\forall q \in \mathbb{Q}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}_0^+ :\ \ln(x^q) = q \ln(x)$

§4. Le nombre e

ln étant une bijection, il existe un et un seul nombre réel strictement positif dont le logarithme népérien égale 1. Ce nombre, noté e depuis Euler (1707-1783) en l'honneur du mot « exponentielle » ☺ est appelé nombre de Néper (1550-1617). Le nombre e égale approximativement 2,7182818284590. Entre autres choses, on sait de lui qu'il est un irrationnel transcendant et qu'il s'exprime comme suit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

§5. Le graphe cartésien de ln



§6. Exercices

1. Justifiez :

   a) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ b) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

   c) $\ln a^3 = 3 \ln a$ d) $\ln \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3} \ln a$

2. Calculez sans calculette :

   a) $\ln e^3$ b) $\ln \frac{1}{e^3}$ c) $\ln \sqrt[3]{e}$

3. Calculez en fonction de lna, lnb et lnc :

   a) $\ln a^3 b^2 c$ b) $\ln \frac{a^2 b}{c^3}$ c) $\ln \sqrt[5]{\frac{a^2 b}{c^3}}$

4. Résolvez dans R :

   a) $\ln x + \ln 3 = 1$ b) $\ln x = \ln 3 + 4$

   c) $2\ln(x + 4) = \ln x + \ln 5$ d) $2\ln(x + 1) = 4\ln 2$

   e) $\ln^2 x - 5 \ln x - 6 = 0$ f) $5 \ln^2 x - 3 \ln x^2 - 1 = 0$

   g) $\ln(4x + 1) < \ln 3$ h) $\ln(3x^2 - 1) \geq \ln 5$

   i) $\frac{\ln x - 1}{2 + \ln x} \geq 0$ j) $\ln^2 x - 5 \ln x + 4 \geq 0$

5. Quel est le domaine de définition des fonctions suivantes ?

   a) $\ln(2x - 3)$ b) $\ln(3x^2 - 4x + 5)$

   c) $\ln|x(3 - x)|$ d) $\ln|x| + \ln|3 - x|$

   e) $\ln\left|\frac{x + 2}{x - 2}\right|$ f) $\ln|x + 2| - \ln|x - 2|$

6. Dérivez les fonctions suivantes :

   a) $\ln(3x - 2)$ b) $\ln(3x^2 + 2x + 1)$

   c) $\sqrt[5]{\ln 3x}$ d) $\ln \sqrt[5]{3x}$

   e) $\ln(\sin x)$ f) $\ln(\text{Arcsin} x)$

   g) $\sin(\ln x)$ h) $\text{Arcsin}(\ln x)$

   i) $\ln^2 x - 3 \ln x + 5$ j) $\ln \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

7. Déterminez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a :

   a) $f(x) = \ln 2x$ et $a = 0{,}5$

   b) $f(x) = \ln^2 3x$ et $a = 0{,}33333...$

   c) $f(x) = \ln \frac{3x + 1}{x + 2}$ et $a = 1$

8. Calculez la dérivée de $\ln|x|$

9. De l'exercice 8 on déduit : $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$

10. Calculez :

a) $\int \frac{1}{2-x} dx$

b) $\int \frac{3x}{2-x^2} dx$

c) $\int_1^2 \frac{6x}{3x^2-1} dx$

d) $\int \operatorname{tg} x dx$

e) $\int \frac{x+3}{x+2} dx$

f) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

g) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

h) $\int \frac{2+\ln^2 x}{3x} dx$

11. Calculez l'aire de la partie du plan déterminée par l'axe X, la courbe d'équation xy = 4 et les droites d'équations x = 1 et x = 4.

12. Calculez l'aire de la partie du plan déterminée par l'axe X, la courbe d'équation xy = 4 et les droites d'équations y = x et x = 5.

13. Calculez :

a) $\int \ln x dx$

b) $\int x \ln x dx$

c) $\int x^2 \ln x dx$

d) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$