Logarithmes et exponentielles de base quelconque

1. Calculez sans calculette:
   $\log_3 81$; $\log 0{,}0001$; $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}$ et $\log_a \sqrt[3]{a^{2n}}$.
2. Sachant que $\log_2 x = 32{,}3$ calculez $\log_2 4x$; $\log_2 x\sqrt[3]{2}$; $\log_2 x^3$.
3. Résolvez:
   a) $\log_x 16 = 2$
   b) $\log_{0,5}(x-2) + \log_{0,5} 3 - \log_{0,5} x = 2$
   c) $3\log_5(x+3) = 2\log_5 3$
   d) $2\log_4(x+3) - \log_4 5 = \log_{16} x$
   e) $\log x > 5$
   f) $\log_3^2 x < 9$
   g) $\log_{0,2}(3x-1) \le 5$
   h) $\log_7 \dfrac{1-x}{1+x} \ge 0$
4. Les fonctions $f(x) = \log(x-2)(x-3)$ et $g(x) = \log(x-2) + \log(x-3)$ sont-elles égales?
5. Résolvez:
   a) $3^x = 81$
   b) $10^{3x-2} = 0{,}01$
   c) $\log_x 125 = 3$
   d) $\log_3(\log_x 81) = 2$
   e) $\log_4 \log_5 x = -1$
   f) $\log_{\frac{1}{a}} a = x$
   g) $\log_{x-1} 4x = 3$
   h) $10^{2x} - 10^x - 5 = 0$
   i) $81^x + 81^{1-x} - 30 = 0$
   j) $\sqrt{5^x} + \dfrac{1}{\sqrt{5^x}} = 2{,}9$
   k) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x = 5^{2x-1}$
6. Dérivez:
   a) 5^{4x+1}
   b) $7^{3x-2} \cdot \log_3(4x+2)$
   c) $\log_5 5^{5x}$
   d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{tg}x}$
   e) $(0{,}5)^{\mathrm{Arctg}x}$
   f) $\sin(\ln x)$
   g) $e^{\sqrt[3]{\ln x}}$
   h) $x^2 \,\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$
7. Calculez:
   a) $\int 5^{2x-1}dx$
   b) $\int (8x-12)\cdot 3^{x^2-3x+2}\,dx$
   c) $\int 3^{\sin x} \cos x \, dx$
   d) $\int \dfrac{5^{\mathrm{Arctg}x}}{1+x^2}dx$

8. Calculez:

a) $\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{3x}dx$

b) $\int_0^1 \frac{4x+2}{x+1}dx$

c) $\int_0^1 \frac{2x-7}{x^2+9}dx$

9. Vérifiez les égalités:

a) $\forall a,b \in R_0^+ \setminus \{1\} : \log_a b \cdot \log_b a = 1$

b) $\forall a,b,c \in R_0^+ \setminus \{1\} : \log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c = 1$

10. Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe X de la surface comprise entre la courbe d'équation y = lnx, l'axe X, les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.

11. Résolvez:

a) $x^{\log x} = x^{\log_5 2x}$

b) $\log_2(2^x - 1) + x = \log_4 144$

c) $2^{x+1} + 2^{x+3} = 2^{1-x} + 2^{2-x}$

d) $1 + \log_x 2 - \log_x(2x+1) = \log_x(x-4) \cdot \log_{x-4}(x+3) - \frac{1}{\log_{x+4} x}$

12. Rappel: $\lim\limits_{\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Calculez:

a) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x$

b) $\lim\limits_{0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x$

c) $\lim\limits_{1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$

d) $\lim\limits_{0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

13. Dérivez:

a) $y = x^x$

b) $y = \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x$

c) $y = (\sin x)^x$