Déterminant

1. Définitions

$$\text{Voici } \mathcal{a} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \text{ une matrice réelle d'ordre n.}$$

Le *déterminant* de la matrice $\mathcal{a}$ $\triangleq$ la somme des produits des éléments d'une rangée de $\mathcal{a}$ par leurs cofacteurs respectifs.

Le *cofacteur* de l'élément $a_{i,j}$ $\triangleq$ le produit de $(-1)^{i+j}$ par le mineur de $a_{i,j}$.

Le *mineur* $A^{i,j}$ de l'élément $a_{i,j}$ $\triangleq$ le déterminant de la matrice d'ordre (n – 1) obtenue en supprimant dans $\mathcal{a}$ la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne.

EX: Si $\mathcal{a}$ est d'ordre 3, alors $A^{2,1}$ = le déterminant de $\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$.

EX: Ainsi, pour comprendre cette définition de la notion de déterminant, il faut avoir compris la notion de cofacteur. Pour comprendre cofacteur, il faut avoir compris mineur. Et pour comprendre mineur, il faut avoir compris déterminant. Serions-nous confrontés à un cercle vicieux ?
Eh bien non, car nous complétons la définition de déterminant de la manière suivante:

Le *déterminant de la matrice d'ordre zéro* (la matrice vide) $\triangleq$ 1.

Notation: le déterminant de $\mathcal{a}$ est noté dét $\mathcal{a}$ ou encore $|\mathcal{a}|$.

2. Exercices

EX: Pour tout nombre réel r : $\text{dét}(r) = r$.

EX: Pour tous réels a,b,c,d : $\text{dét}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

EX: Calculez le déterminant d'une matrice d'ordre 3.

EX: Le déterminant d'une matrice est indépendant du choix de la rangée.

EX: La règle de Sarrus. [Pierre Sarrus (1798-1861)].

EX : La théorie algébrique des matrices fut inventée par le mathématicien anglais Arthur Cayley (1821-1895) alors qu'il s'intéressait aux transformations linéaires du type $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$.

EX: Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$.

3. Propriétés

REM : dans les démonstrations, on se limitera aux matrices d'ordre 3, mais ces propriétés sont valables pour tout ordre naturel.

EX: Une matrice et sa transposée ont même déterminant.

EX : Si tous les éléments d'une rangée d'une matrice sont nuls, alors son déterminant est nul.

EX: Si deux rangées parallèles d'une matrice sont égales, alors son déterminant est nul.

EX: Si deux rangées parallèles d'une matrice sont proportionnelles, alors son déterminant est nul.

EX: Si on permute deux rangées parallèles, alors le déterminant change de signe.

EX: La fonction $\text{dét} : R^{3x3} \to R, x \mapsto \text{dét } x$ est multilinéaire par rapport aux rangées.

EX: Si une rangée d'une matrice est combinaison linéaire des autres rangées parallèles, alors son déterminant est nul.

EX: Si on ajoute à une rangée d'une matrice une combinaison linéaire des autres rangées parallèles, alors son déterminant reste inchangé. (Remarquez la formulation boîteuse de cette propriété).

EX: La somme des produits des éléments d'une rangée d'une matrice par les cofacteurs respectifs d'une autre rangée parallèle égale zéro.

Matrice *régulière* $\triangleq$ matrice à déterminant non nul.
Matrice singulière $\triangleq$ matrice dont le déterminant est nul

EX : dét $\mathcal{AB}$ = dét $\mathcal{A}$. dét $\mathcal{B}$

EX : Si $\mathcal{A}$ est inversible alors dét $\mathcal{A} \neq 0$