Matrices et déterminants

1. Calculez les déterminants des matrices A et B en appliquant
   - la définition de déterminant
   - la méthode de Sarrus

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}^2$$

2. Calculez les déterminants suivants après avoir fait d'éventuelles mises en évidence et après avoir fait apparaître deux zéros dans une rangée. Déterminez ensuite les valeurs réelles des termes littéraux pour lesquelles chaque déterminant est nul.

$$A = \begin{vmatrix} a+3 & -1 & 1 \\ 5 & a-3 & 1 \\ 6 & -6 & a+4 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1-b & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 4-b \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} c^2+2 & 3c & 3c \\ 3 & c^2+2c & 3c \\ c^2+c+4 & c^2+5c & c^2+5c \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & d & -1 \\ -1 & 1 & d \end{vmatrix}$$

3. Calculez le déterminant de chacune des matrices suivantes en vous interdisant la méthode de Sarrus et en n'utilisant la définition qu'après avoir utilisé les propriétés qui permettent de simplifier les calculs. Citez les propriétés utilisées.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$$

4. Les déterminants suivants sont nuls. Prouvez-le en montrant qu'une de leurs rangées est combinaison linéaire des deux autres.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \\ 9 & -4 & 18 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

5. Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ est appelé déterminant de Vandermonde.

   Vérifiez qu'il est égal à $(a - b)(b - c)(c - a)$ en utilisant la définition, après avoir fait apparaître deux zéros dans la première colonne et effectué quelques mises en évidence.
   Pour le "plaisir", essayez d'arriver au même résultat en appliquant la méthode de Sarrus.

6. Outre les propriétés habituelles, utilisez la formule de Vandermonde pour calculer les déterminants suivants:

$$A = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{b} & 1 & b \\ \frac{1}{c} & 1 & c \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 1/3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

7. Calculez:

$$M = \text{dét} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad N = \text{dét} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

8. Déterminez le rang de chacune des matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ 1 & 7 \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1{,}5 & 3{,}5 & 1 \\ 2{,}5 & 5{,}8333\ldots & 1{,}666\ldots \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$