Changements de repère

§1. Repérage d'un point du plan

Le plan usuel π est un exemple de plan affine. Il est dégagé de toute autre structure.
La donnée d'un triple de points non alignés de π définit un repère.
On note π_{oeu} le plan π muni du repère $\mathcal{R} = (o , e , u)$.
Pointé en o, le plan π est immédiatement équipé d'une structure d'espace vectoriel réel dans laquelle les notions de base, produit scalaire, norme, orthogonalité… ont déjà été définies.

EX : la paire { e , u } est une base de π_o.

coordonnée de x dans le repère (o , e , u)
=
l'unique couple de réels (α,β) tel que $x = \alpha \cdot e + \beta \cdot u$ dans π_o

définition

EX : indiquez l'importance des mots « dans π_o » de la définition précédente.
EX : traduisez cette définition lorsque le repère est noté (c , r , s).

TERMINOLOGIE : on dit aussi
coordonnée cartésienne - coordonnées - coordonnées cartésiennes.

Nous allons étudier comment se transforme la coordonnée d'un point quand on change de repère.

§2. Changement de repère

Voici deux repères du plan : $\mathcal{R}$ = (o , e , u) et $\mathcal{R}^*$ = (c , r , s).
Examinons quelques transformations du plan qui transforment le repère $\mathcal{R}$ en le repère $\mathcal{R}^*$

1^er cas : Les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ ont même origine, c'est-à-dire c = o

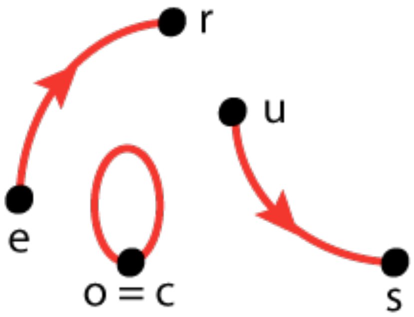

figure 1

Le changement de repère peut être obtenu par une transformation linéaire du plan π_o qui laisse l'origine de l'espace vectoriel réel π_o fixe et qui transforme la base { e , u } en la base { r , s }.

✱ Cette transformation linéaire est unique et est une permutation de π_o (voir annexe).

EX : Rappelez ce qu'est une permutation linéaire de π_o.

2^ème cas : Les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ ont des origines différentes, c-à-d c ≠ o

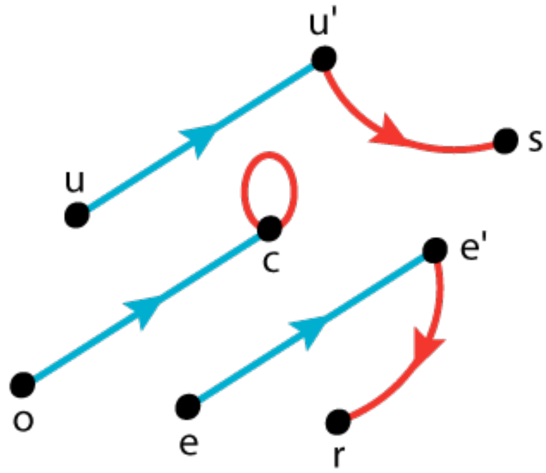

figure 2

Le changement de repère est obtenu en effectuant d'abord la translation de π_o de vecteur c qui fournit le repère $\mathcal{R}^*$ = (c, e', u') et ensuite la permutation linéaire du plan π_o qui conserve c et transforme la base { e', u' } en la base { r , s }.

§3. Coordonnée et changement de repère

Voici $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ deux repères du plan.

On se pose la question suivante :

Connaissant la coordonnée d'un point dans le repère $\mathcal{R}$ quelle est sa coordonnée dans le repère $\mathcal{R}^*$?

1er cas : $\mathcal{R}^*$ est image de $\mathcal{R}$ par une translation

► $\mathcal{R} = (o , e , u)$
► **T** une translation du plan
► $\mathcal{R}^* = (c , r , s)$ l'image de $\mathcal{R}$ par **T**

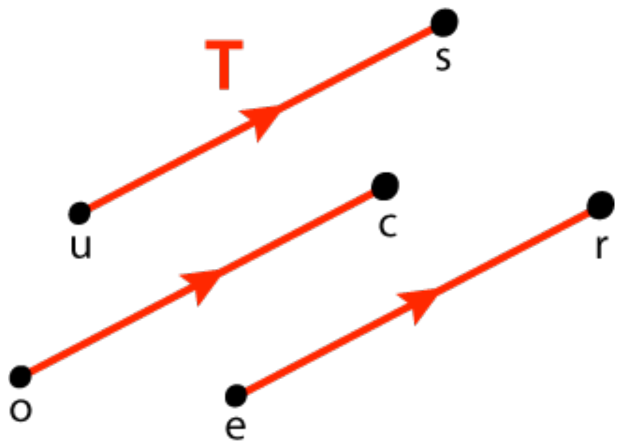

figure 3

✱ **T** est la translation de π_o, de vecteur c
et dans π_o : $r = e + c$; $s = u + c$

► (α,β) la coordonnée de c dans $\mathcal{R}$
► p un point de coordonnée (x , y) dans $\mathcal{R}$

☐ La coordonnée de p dans $\mathcal{R}^*$ est $(x-\alpha\ ,\ y-\beta)$ [Théo 1]

En décidant de représenter la translation T et le point p respectivement par les matrices colonne $\mathcal{T} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ et $\mathcal{P} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, le théorème 1 se résume en le tableau suivant

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}^* = \mathrm{T}\mathcal{R}$
p	$\mathcal{P}$	$-\mathcal{T}+\mathcal{P}$

Pour démontrer [Théo 1], il suffit de réaliser un beau dessin de la situation :

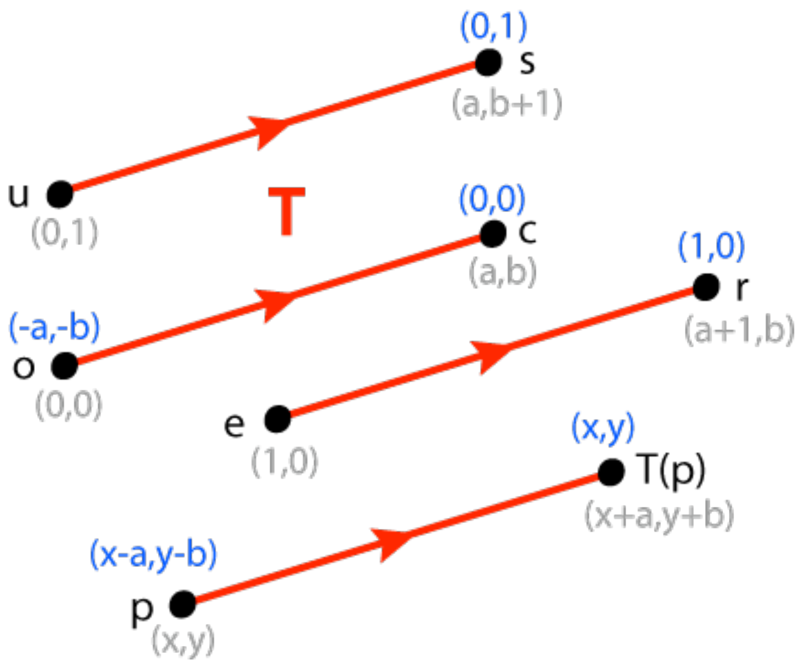

figure 4

■

2ème cas : $\mathcal{R}$* est image de $\mathcal{R}$ par une permutation linéaire

► $\mathcal{R}$ = (o , e , u)
► **T** une permutation linéaire de π_o
► $\mathcal{R}$* = (c , r , s) l'image de $\mathcal{R}$ par **T**

✱ c = o car **T** est linéaire et $\mathcal{R}$* est un repère car { r , s } est une base de π_o

Rappelons d'abord que la permutation linéaire **T** a une matrice relative au repère $\mathcal{R}$. Cette matrice $\mathcal{T}$ s'obtient de la manière suivante :

> Te et Tu étant des points de πo, ils s'expriment de manière unique à travers la base {e , u}. Ainsi, Te = a·e + b·u et Tu = c·e + d·u, où a, b, c, d sont des nombres réels.
>
> $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

EX : **T** a aussi une matrice relative au repère $\mathcal{R}$*

La matrice $\mathcal{T}$ est bien utile dès que l'on décide d'écrire la coordonnée (x , y) du point p en colonne et de la traiter comme une matrice de genre (2,1) notée aussi $\mathcal{P}$.

Ainsi $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Il vient alors le joli théorème:

☐ Dans $\mathcal{R}$, si p a pour coordonnée $\mathcal{P}$
alors Tp a pour coordonnée $\mathcal{T}\,.\,\mathcal{P}$ [Théo 2]

Démonstration faite en classe
Le théorème 2 se résume en

	$\mathcal{R}$
p	$\mathcal{P}$
Tp	$\mathcal{T}\,.\,\mathcal{P}$

■

Un autre théorème est bien facile:

☐ Coordonnée de p dans $\mathcal{R}$ = coordonnée de Tp dans T$\mathcal{R}$ [Théo 3]

et le tableau s'étend

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}^* = \mathrm{T}\mathcal{R}$
p	$\mathcal{P}$	
Tp	$\mathcal{T}\,.\,\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$

■

Lorsque nous aurons rempli la case vide de ce tableau, nous aurons répondu à la question posée en début de paragraphe.
Raisonnons:

coordonnée de p dans $\mathcal{R}^*$
= coordonnée de T^{-1}p dans $\mathrm{T}^{-1}\mathcal{R}^*$ ou $\mathcal{R}$ (car T^{-1} est une permutation linéaire et Théo 3)
= $\mathcal{T}^{-1}\,.\,\mathcal{P}$ (Théo 2)

On complète le tableau:

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}^* = \mathrm{T}\mathcal{R}$
p	$\mathcal{P}$	$\mathcal{T}^{-1}\,.\,\mathcal{P}$
Tp	$\mathcal{T}\,.\,\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$

3ème cas : $\mathcal{R}^*$ et $\mathcal{R}$ sont quelconques

Conformément à ce que nous avons écrit dans le paragraphe 2, la transformation du plan π_o qui applique $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}^*$ peut être décomposée en une translation suivie d'une permutation linéaire, bref en effectuant successivement les transformations détaillées dans les 1er et 2ème cas.

EX:
- ► $\mathcal{R} = (o , e , u)$ un repère du plan
- ► c, r et s les points de coordonnées respectives (3,2), (2,3), (1,1) dans $\mathcal{R}$
- ► $\mathcal{R}^* = (c , r , s)$

Sachant que le point p a pour coordonnée (λ,μ) dans $\mathcal{R}$,
quelle est sa coordonnée dans $\mathcal{R}^*$

§4. Equation et changement de repère

Certaines questions de géométrie peuvent être traitées par le calcul. C'est le domaine de la géométrie analytique. En classe de sixième, on fait essentiellement de la géométrie analytique plane. Les objets que l'on étudie (droite, cercle, conique…) sont représentés par des équations.

EX: Voici E une partie de π_{oeu}

✶ Equation de E = Egalité qui lie les coordonnées des points de E

Ainsi,
L'équation $3x + 2y = 6$ définit la droite qui passe par les points de coordonnées (2,0) et (0,3).
L'équation $x^2 + y^2 = 9$ définit le cercle de rayon 3 et de centre (0,0).
L'équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ définit le cercle de centre (1,2) et de rayon 3.

EX: Des équations différentes peuvent définir le même objet.

Les deux exemples de cercles définis ci-dessus montrent qu'une équation est plus ou moins simple suivant la position que l'objet qu'elle représente occupe par rapport au repère. La part du calcul étant importante en géométrie analytique, il sera donc souvent indiqué de changer de repère afin de simplifier les équations et par là même, les calculs.

EX: L'EX précédent a une double interprétation.

Etudions maintenant la manière dont se transforme la coordonnée d'une courbe quand on change de repère.

EX: C'est volontairement que nous avons écrit *coordonnée d'une courbe* plutôt qu' *équation d'une courbe*. Commentez.

Voici $\mathcal{R}$ = (o , e , u) et $\mathcal{R}^*$ = (c , r , s) deux repères et C une partie du plan.

Connaissant l'équation de C dans le repère $\mathcal{R}$, quelle est son équation dans le repère $\mathcal{R}^*$?

EX: On dit l' équation de C, son équation … sans aucun scrupule.

1er cas: $\mathcal{R}^*$ est image de $\mathcal{R}$ par une translation

► T la translation qui applique $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}^*$
✶ T est la translation de π_o, de vecteur c
► (α,β) la coordonnée de c dans $\mathcal{R}$

Raisonnons calmement:

$C \equiv f(x,y) = 0$ dans $\mathcal{R}$

ssi $C = \{p \in \pi \mid p$ a pour coordonnée (x,y) dans $\mathcal{R}$ et $f(x,y) = 0\}$

ssi $C = \{p \in \pi \mid p$ a pour coordonnée $(x-\alpha, y-\beta)$ dans $\mathcal{R}^*$ et $f(x,y) = 0\}$

ssi $C = \{p \in \pi \mid p$ a pour coordonnée (x^*, y^*) dans $\mathcal{R}^*$ et $f(x^*+\alpha, y^*+\beta) = 0\}$

ssi $C = \{p \in \pi \mid p$ a pour coordonnée (x,y) dans $\mathcal{R}^*$ et $f(x+\alpha, y+\beta) = 0\}$

ssi $C \equiv f(x+\alpha, y+\beta) = 0$.

En résumé et en utilisant les notations préconisées plus haut:

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}^* = T\mathcal{R}$
C	$f(\mathcal{P}) = 0$	$f(\mathcal{T}+\mathcal{P}) = 0$

[Théo 4] ■

EX: On donne $\mathcal{R}$ = (o , e , u) un repère, le point c de coordonnée (1,5 ; 1) dans $\mathcal{R}$,
T la translation de vecteur c, le repère $\mathcal{R}^* = T\mathcal{R}$ = (c , r , s) et la droite D d'équation
2x + 3y – 6 = 0 dans $\mathcal{R}$.
Faites un petit schéma de la situation et recherchez l'équation de D dans $\mathcal{R}^*$.
(réponse: 2x + 3y = 0)

2ème cas: $\mathcal{R}^*$ est image de $\mathcal{R}$ par une permutation linéaire

► T la permutation linéaire de π_o qui applique $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}^*$
et $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sa matrice relative à $\mathcal{R}$
✶ c = o car T est linéaire

$C \equiv f(x,y) = 0$ dans $\mathcal{R}$

ssi $C = \{p \in \pi \mid p$ a pour coordonnée (x,y) dans $\mathcal{R}$ et $f(x,y) = 0\}$

… à développer …

ssi $C = \{p \in \pi \mid p$ a pour coordonnée (x,y) dans $\mathcal{R}^*$ et $f(ax+cy, bx+dy) = 0\}$

En résumé, étant donné la permutation linéaire T de matrice $\mathcal{T}$

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}^* = \mathrm{T}\mathcal{R}$
C	$f(\mathcal{P}) = 0$	$f(\mathcal{T} . \mathcal{P}) = 0$

[Théo 5] ■

EX: On donne $\mathcal{R}$ = (o , e , u) un repère, les points r et s de coordonnées respectives (3,0) et (3,4) dans $\mathcal{R}$, le repère $\mathcal{R}^* = \mathrm{T}\mathcal{R}$ = (o , r , s) et la droite D d'équation $2x + 3y - 6 = 0$ dans $\mathcal{R}$.
Déterminez l'équation de D dans $\mathcal{R}^*$. (réponse: $x + 3y - 1 = 0$)

EX: Les rotations du plan autour de l'origine du repère $\mathcal{R}$ sont des permutations linéaires. Vérifiez.

EX: Déterminez la matrice de la rotation d'angle α autour de l'origine

3$^{\text{ème}}$ cas: $\mathcal{R}^*$ et $\mathcal{R}$ sont quelconques

Voyez le 3$^{\text{ème}}$ cas du paragraphe 3.

§5. Tableaux résumés

Moyennant quelques conventions d'écriture, nous obtenons deux tableaux géniaux

translation T

de matrice $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}^* = \mathrm{T}\mathcal{R}$
p	$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$-\mathcal{T} + \mathcal{P}$
C	$f(\mathcal{P}) = 0$	$f(\mathcal{T} + \mathcal{P}) = 0$
T(p)	$\mathcal{T} + \mathcal{P}$	$\mathcal{P}$
T(C)	$f(-\mathcal{T} + \mathcal{P}) = 0$	$f(\mathcal{P}) = 0$

permutation linéaire T

de matrice $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ relative à $\mathcal{R}$

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}^* = \mathrm{T}\mathcal{R}$
p	$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\mathcal{T}^{-1} . \mathcal{P}$
C	$f(\mathcal{P}) = 0$	$f(\mathcal{T} . \mathcal{P}) = 0$
T(p)	$\mathcal{T} . \mathcal{P}$	$\mathcal{P}$
T(C)	$f(\mathcal{T}^{-1} . \mathcal{P}) = 0$	$f(\mathcal{P}) = 0$

Annexe : Existence et unicité d'une permutation linéaire de π_o qui applique $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}^*$.

(1) Etant donné deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ de π_o **de même origine o**, il existe une transformation linéaire de π_o qui applique le repère $\mathcal{R}$ sur le repère $\mathcal{R}^*$

▶ $\mathcal{R} = (o;e,u)$ et $\mathcal{R}^* = (o;r,s)$.

Considérons $f : \pi_o \to \pi_o, x = x_1 e + x_2 u \mapsto f(x) \triangleq x_1 r + x_2 s$.

(a) f transforme $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}^*$ car
o = 0 e + 0 u implique f(o) = 0 r + 0 s = o (définition de f)
e = 1 e + 0 u implique f(e) = 1 r + 0 s = r (définition de f)
u = 0 e + 1 u implique f(u) = 0 r + 1 s = s (définition de f)

(b) f est linéaire car $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \forall x,y \in \pi_o : f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

▶ $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$

▶ $x,y \in \pi_o$

▶ $(x_1,x_2),(y_1,y_2)$ les coordonnées respectives de x et y dans $\mathcal{R}$.

Calculons :

$$f(\lambda x + \mu y) \underset{(1)}{=} f\big(\lambda(x_1 e + x_2 u) + \mu(y_1 e + y_2 u)\big) \underset{(2)}{=} f\big((\lambda x_1 + \mu y_1)e + (\lambda x_2 + \mu y_2)u\big)$$

$$\underset{(3)}{=} (\lambda x_1 + \mu y_1)r + (\lambda x_2 + \mu y_2)s \underset{(4)}{=} \lambda(x_1 r + x_2 s) + \mu(y_1 r + y_2 s) \underset{(5)}{=} \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Justifications :
(1) expression de x et y dans le repère $\mathcal{R}$; (2) calcul dans l'espace vectoriel π_o
(3) définition de f ; (4) calcul dans l'espace vectoriel π_o ; (5) définition de f

(2) La transformation f de π_o définie en (1) est la seule transformation linéaire de π_o qui applique le repère $\mathcal{R}$ sur le repère $\mathcal{R}^*$.

▶ $g : \pi_o \to \pi_o$ linéaire et qui applique $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}^*$.
Prouvons que g = f c'est-à-dire que $\forall x \in \pi_o : g(x) = f(x)$.

▶ $x \in \pi_o$ et (x_1,x_2) sa coordonnée dans $\mathcal{R}$

$$g(x) \underset{(1)}{=} g(x_1 e + x_2 u) \underset{(2)}{=} x_1 g(e) + x_2 g(u) \underset{(3)}{=} x_1 r + x_2 s \underset{(4)}{=} f(x).$$

Justifications
(1) expression de x dans le repère $\mathcal{R}$; (2) linéarité de g ; (3) g applique $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}^*$
(4) définition de f

(3) Cette unique transformation linéaire f est une bijection.
Cela vient du fait que tout point de π_o a une coordonnée unique dans un repère de π_o et que la coordonnée du point x dans $\mathcal{R}$ égale la coordonnée de f(x) dans $\mathcal{R}^*$.