Fiche pratique pour la résolution des systèmes de trois équations à trois inconnues

Voici le système $(S) = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ où les nombres réels a_i, b_i, c_i ne sont pas tous nuls.

On examine la matrice $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ du système et $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ son déterminant.

(1) Si $\Delta \neq 0$, alors le système est déterminé. L'ensemble des solutions est un singleton {(x,y,z)} qui est fourni par les formules $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$

avec $\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ (c'est la méthode de Cramer).

(2) Si $\Delta = 0$, alors deux sous-cas se présentent :

Soit il existe au moins une sous-matrice d'ordre 2 de $\mathcal{M}$ qui a son déterminant non nul
Dans ce cas, une ligne de $\mathcal{M}$ est combinaison linéaire des deux autres.
On recherche cette CL et on vérifie si les termes indépendants suivent cette CL.

- Si OUI, alors le système est simplement indéterminé. L'ensemble des solutions est une droite dont on détermine un vecteur directeur et un point de passage. Géométriquement, les trois plans se coupent suivant une droite.
- Si NON, alors le système est impossible. L'ensemble des solutions est vide. Géométriquement, ou bien les trois plans se coupent deux à deux suivant les arêtes d'un prisme triangulaire ou bien deux des trois plans sont parallèles distincts et le troisième les coupe (bien examiner les équations deux par deux).

Soit toutes les sous-matrices d'ordre 2 de $\mathcal{M}$ ont leur déterminant nul
Dans ce cas, les lignes de $\mathcal{M}$ sont proportionnelles.
On recherche cette proportion et on vérifie si les termes indépendants suivent cette proportion.

- Si OUI, alors les trois plans sont confondus.
  Le système est doublement indéterminé et l'ensemble des solutions est « un des trois plans »
- Si NON, alors au moins deux des trois plans sont parallèles distincts.
  Le système est impossible. L'ensemble des solutions est vide.