Systèmes linéaires

1. Calculez les solutions des systèmes suivants dans R^3. Pour chacun d'eux, précisez s'il est déterminé, simplement ou doublement indéterminé, ou encore impossible. Analysez également les positions relatives des plans qu'il définit et décrivez sa solution géométrique.

a) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+y-z=2 \\ x+3y-2z=-1 \end{cases}$ $\quad S=\left\{\left(\frac{\lambda+7}{5},\frac{3\lambda-4}{5},\lambda\right) \;\middle|\; \lambda\in R\right\}$

b) $\begin{cases} 3x+4y-5z=2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-2y+8z=9 \end{cases}$ $\quad S=\{(1,1,1)\}$

c) $\begin{cases} 7x+2y-z=0 \\ 9x+y-5z=-4 \\ 8x+6y-2z=2 \end{cases}$ $\quad S=\left\{\left(\frac{-5}{53},\frac{38}{53},\frac{41}{53}\right)\right\}$

d) $\begin{cases} 8x+4y-z=2 \\ y+z=1 \\ 4x-5y+z=11 \end{cases}$ $\quad S=\{(1,-1,2)\}$

e) $\begin{cases} x-4y-z=1 \\ 2x-5y+2z=2 \\ 6x-18y+2z=6 \end{cases}$ $\quad S=\left\{\left(\frac{3-13\lambda}{3},\frac{-4\lambda}{3},\lambda\right) \;\middle|\; \lambda\in R\right\}$

f) $\begin{cases} 2x-5y+3z=0 \\ 5x+2y-3z=0 \\ 21x-9y=0 \end{cases}$ $\quad S=\{(9\lambda,21\lambda,29\lambda) \mid \lambda\in R\}$

g) $\begin{cases} x+2y-5z=8 \\ 4x+6y-2z=5 \\ x+y+4z=2 \end{cases}$ $\quad S=\varnothing$

h) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+4z=-2 \\ 5x+8y+11z=3 \end{cases}$ $\quad S=\varnothing$

i) $\begin{cases} x+2y+3z=-2 \\ 2x+3y+4z=1 \\ 10x+16y+22z=0 \end{cases}$ $\quad S=\{(\lambda+8,-2\lambda-5,\lambda) \mid \lambda\in R\}$

j) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 4x-4y+4z=8 \\ -2x+2y-2z=-4 \end{cases}$ $\quad S=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x-y+z=2\}$

k) $\begin{cases} x+4y-z=1 \\ 4x-6y+4z=42 \\ -x+2y+z=17 \end{cases}$ $\quad S=\{(2,3,13)\}$

2. Résolvez, discutez et interprétez géométriquement les systèmes suivants (a, b et c sont des paramètres réels):

1). $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+az=2 \\ ax+a^2y+a^3z=b \end{cases}$

2). $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=a^2 \end{cases}$

3). $\begin{cases} x+ay+z=2a \\ ax+y+z=0 \\ x+ay+(a+1)z=a \end{cases}$

4). $\begin{cases} x+y+az=a^2 \\ x+ay+z=3a \\ ax+y+z=2 \end{cases}$

5). $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=b \end{cases}$

6). $\begin{cases} x+ay+a^2z=1 \\ x+ay+abz=a \\ bx+ay+a^2bz=a^2 \end{cases}$

7). $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ bcx+cay+abz=1 \end{cases}$

8). $\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \\ a^3x+b^3y+c^3z=(a-b)(b-c)(c-a) \end{cases}$

9). $\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$