Résoudre, discuter et interpréter géométriquement :

$$\begin{cases} x+my+z=2m \\ x+y+mz=0 \\ (m+1)x+my+z=m \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{R})$$

Le déterminant de la matrice A du système égale $m(m-1)(m+1)$

1er cas : $m \notin \{-1,0,1\}$

Le système est déterminé. Son unique solution est le point de coordonnée $\left(-1,\dfrac{2m-1}{m-1},\dfrac{1}{1-m}\right)$. Les trois plans se coupent suivant un singleton.

2ème cas : $m=-1$

La matrice A est de rang 2 car L1 et L2 sont indépendantes.

$L3=\dfrac{1}{2}L1-\dfrac{1}{2}L2$ et les termes indépendants suivent cette CL.

Le système est donc simplement indéterminé. Les trois plans se coupent suivant la droite $S=\{(-1,\lambda+1,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Cette droite passe par le point $(-1,1,0)$ et admet $(0,1,1)$ comme vecteur directeur.

3ème cas : $m=0$

La matrice A est de rang 2 car L1 et L2 sont indépendantes.
L3 = 1.L1+0.L2 et les termes indépendants suivent cette CL.
Le système est donc simplement indéterminé. Les trois plans se coupent suivant la droite $S=\{(-\lambda,\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. C'est la droite vectorielle de vecteur directeur $(-1,1,1)$.

4ème cas : $m=1$

La matrice A est de rang 2 car L2 et L3 sont indépendantes.
L1 = 1.L2+0.L3 et les termes indépendants ne suivent pas cette CL. Le système est impossible. Deux plans sont parallèles distincts et le troisième les coupe.

Et pour conclure, un petit tableau.

m		-1		0		1	
Nature du système	D	SI	D	SI	D	I	D