Résolvez, discutez et interprétez géométriquement dans R^3 le système suivant:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+2ay+az=2 \\ 3x+(a+2)y+(a+1)z=9 \end{cases} \qquad \text{(a est un paramètre réel).}$$

Le déterminant de la matrice M du système égale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2a & a \\ 3 & a+2 & a+1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C2\backslash C2-C1 \\ C3\backslash C3-C1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2(a-1) & a-2 \\ 3 & a-1 & a-2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)$$

Trois cas se présentent:

Soit $a \neq 1$ et $a \neq 2$.
Alors le système est déterminé.
Sa seule solution qui peut être calculée par la méthode de Cramer
est le point $\left(\frac{4a-1}{a-1}, \frac{3}{1-a}, 0\right)$.
Les trois plans se coupent suivant un singleton.

Soit $a = 1$.
Dans ce cas, le rang de M égale 2 et on aperçoit la combinaison L1 + L2 = L3 dans la matrice M.
Comme les termes indépendants ne suivent pas cette combinaison puisque $4 + 2 \neq 9$, le système est impossible.
Les trois plans se présentent dans l'espace comme un toblerone.

Soit $a = 2$.
Le rang de M égale 2. $L3 = 2L1 + \frac{1}{2}L2$. Les TI suivent.
Le système est simplement indéterminé.
Les trois plans se coupent suivant la droite de vecteur directeur $(-1,0,1)$
et comprenant le point $(7,-3,0)$.