Résolvez, discutez et interprétez géométriquement le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \quad \text{où } (\lambda \in \mathbb{R}) \\ \lambda x + y + z = \lambda^2 \end{cases}$$

La matrice M du système a pour déterminant $-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$
Trois cas se présentent :

1°). $\underline{\lambda \notin \{-2,1\}}$

Dans ce cas, détM ≠ 0 et le système est déterminé et son unique solution peut être calculée par la méthode de Cramer.
On trouve $S = \left\{ \left(\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \right) \right\}$.
Géométriquement, le système représente trois plans dont l'intersection est un singleton.

2°). $\underline{\lambda = -2}$

La matrice du système devient : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Elle est bien évidemment de déterminant nul et son rang égale 2 pcq …
Il y a donc une CL entre les lignes de M et celle-ci se voit à l'œil nu : L3 = – L1 – L2.
Les termes indépendants ne suivent pas cette CL car $4 \neq -1 + 2$.
Le système est donc impossible et S = Ø.
Géométriquement, les trois plans du système se coupent deux à deux suivant trois droites distinctes et parallèles. (Toblerone).

3°). $\underline{\lambda = 1}$

La matrice M du système s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Elle est de rang 1. Les termes indépendants suivent la proportion des lignes de M. Le système est donc doublement indéterminé.
S = le plan d'équation x + y + z = 1.
Géométriquement, les trois plans du système sont confondus.