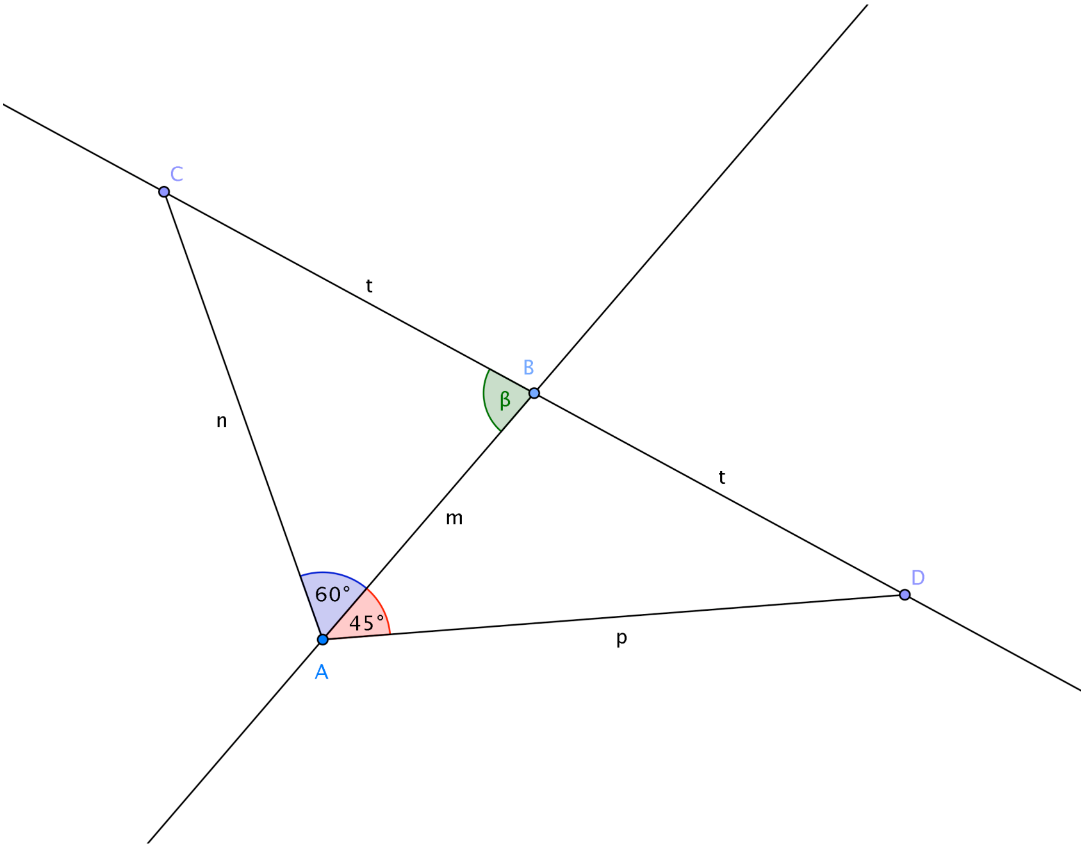
Deux voies de chemin de fer se coupent au point B. Un individu se trouve au point A sur l'une des deux voies et observe un train qui se déplace sur l'autre voie. Quand l'avant du train arrive au point B, l'observateur le voit sous un angle de 60°, et quand l'arrière du train arrive en B, il le voit sous un angle de 45°.
Quel est l'angle β des deux voies ?



Représentons la longueur du train par la lettre « t » et complétons le schéma comme ci-dessus.
L'identité aux sinus appliquée aux triangles ABC et ABD fournit successivement :

$$\frac{n}{\sin\beta} = \frac{t}{\sin 60°} \quad \text{d'où} \quad \sin\beta = \frac{n\sqrt{3}}{2t} \quad \textbf{(i)}$$

$$\text{et} \quad \frac{p}{\sin(180° - \beta)} = \frac{t}{\sin 45°} \quad \text{d'où} \quad \sin\beta = \frac{p\sqrt{2}}{2t} \quad \textbf{(ii)}$$

De **(i)** et **(ii)** on déduit : $p = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} n$ **(iii)**

La formule de « Pythagore généralisé » appliquée au triangle ACD s'écrit :

$$4t^2 = n^2 + p^2 - 2np\cos 105° \quad \textbf{(iv)}$$

On calcule : $\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \ldots = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right)$ **(v)**

On remplace **(iii)** et **(v)** dans **(iv)** et on obtient :

$$4t^2 = \left(4 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)n^2 \quad \text{et} \quad 2t = n \cdot \sqrt{4 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \textbf{(vi)}$$

Enfin on remplace **(vi)** dans **(i)** et on a : $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} \cong 0{,}978$ d'où on tire : $\beta \cong 78°$.