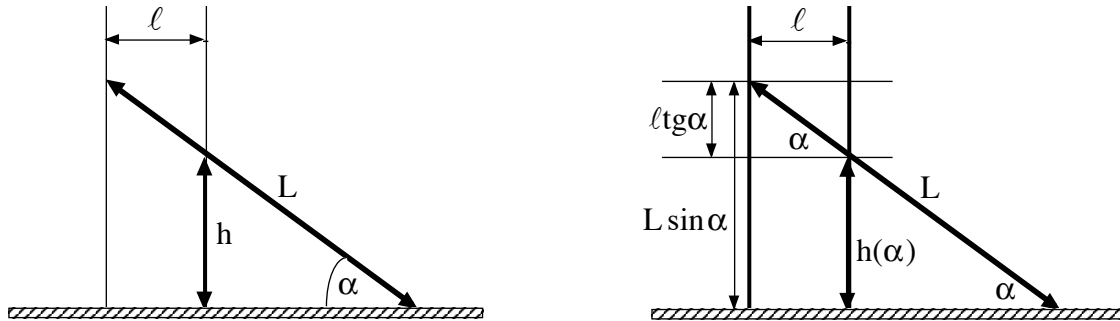


Déterminer la hauteur minimale de la porte d'une tour verticale à base carrée et de profondeur  $\ell$ , de manière que l'on puisse y faire entrer une échelle rigide de longueur  $L$  dont le pied glisse sur le sol. L'échelle est bien évidemment plus longue que la tour n'est large.



On observe que  $h(\alpha) = L \sin \alpha - \ell \operatorname{tg} \alpha$

et que la hauteur minimale de la porte est la valeur maximale de  $h(\alpha)$ .

Dérivons :  $h'(\alpha) = L \cos \alpha - \frac{\ell}{\cos^2 \alpha} = \frac{L \cos^3 \alpha - \ell}{\cos^2 \alpha}$

$h'(\alpha) = 0$  ssi  $L \cos^3 \alpha - \ell = 0$  ssi  $\cos \alpha = \sqrt[3]{\frac{\ell}{L}}$  ssi  $\alpha = \operatorname{Arc} \cos \sqrt[3]{\frac{\ell}{L}}$

Pour cette valeur de  $\alpha$ , la valeur de  $h$  est bien maximale et non minimale car la valeur minimale de  $h$  est zéro et dans ce cas, l'échelle ne passe pas.

Calculons cette valeur de  $h$  :

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{\ell^2}{L^2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{L^2}{L^2}} - \sqrt[3]{\frac{\ell^2}{L^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{L}} \left( \sqrt{\sqrt[3]{L^2} - \sqrt[3]{\ell^2}} \right)$$

$$\text{et } L \sin \alpha = \sqrt[3]{L^2} \left( \sqrt{\sqrt[3]{L^2} - \sqrt[3]{\ell^2}} \right),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \sin \alpha = \sqrt[3]{\frac{L}{\ell}} \frac{1}{\sqrt[3]{L}} \left( \sqrt{\sqrt[3]{L^2} - \sqrt[3]{\ell^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\ell}} \left( \sqrt{\sqrt[3]{L^2} - \sqrt[3]{\ell^2}} \right)$$

$$\text{et } \ell \operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\ell^2} \left( \sqrt{\sqrt[3]{L^2} - \sqrt[3]{\ell^2}} \right).$$

$$\text{Par conséquent : } h = \sqrt[3]{L^2} \left( \sqrt{\sqrt[3]{L^2} - \sqrt[3]{\ell^2}} \right) - \sqrt[3]{\ell^2} \left( \sqrt{\sqrt[3]{L^2} - \sqrt[3]{\ell^2}} \right) = \left( \sqrt[3]{L^2} - \sqrt[3]{\ell^2} \right) \left( \sqrt{\sqrt[3]{L^2} - \sqrt[3]{\ell^2}} \right)$$

$$\text{Ainsi: } h = \sqrt{\left( \sqrt[3]{L^2} - \sqrt[3]{\ell^2} \right)^3}.$$

En pratique, pour pouvoir introduire une échelle de 6m de long dans une tour qui a de 2m de profondeur, il faut que la porte ait une hauteur d'au moins 2m25.