

Etudiez les variations de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

1. Etude de f

$$\text{dom}f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

racine de f : 0

$$f \cap X = f \cap Y = \{(0, 0)\}$$

$$AV_1 \equiv x = -1$$

$$AV_2 \equiv x = 1$$

pas d'AH

$$AO \equiv y = x \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty$$

f est impaire car $\forall x \in \text{dom}f : f(-x) = -f(x)$

2. Etude de f'

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

Le signe de f'

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
x^2	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 3$	+	0	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$(x^2 - 1)^2$	+	+	+	0	+	+	+	0	+	+	+
f'(x)	+	0	-	///	-	0	-	///	-	0	+

3. Etude de f''

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

Le signe de f''

x		-1		0		1	
2x	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 + 3$	+	+	+	+	+	+	+
$(x^2 - 1)^3$	+	0	-	-	-	0	+
f''(x)	-	///	+	0	-	///	+

4. Tableau général

x	$-\infty$		-1,7		-1		0		1		1,7		$+\infty$
$f''(x)$		-	-	-	///	+	0	-	///	+	+	+	
$f'(x)$		+	0	-	///	-	0	-	///	-	0	+	
f(x)	AO $y = x$	\curvearrowright \nearrow	\curvearrowright Max -2,6	\curvearrowright \searrow	AV $x = -1$	\curvearrowright \searrow	PIH 0	\curvearrowright \nearrow	AV $x = 1$	\curvearrowright \searrow	\curvearrowright min 2,6	\curvearrowright \nearrow	AO $y = x$

5. Graphe cartésien de f

