1. Ensembles[1]

1. L'idée d'ensemble est fort courante

Elle est évoquée par les mots suivants : classe - groupe - tribu - collection - troupeau - foule - régiment - école…

EX1 : Donne d'autres mots qui évoquent l'idée d'ensemble
EX2 : En mathématique, la notion d'ensemble est une notion première ou primitive
EX3 : Georg Cantor (1845-1918), mathématicien allemand, est le créateur de la théorie des ensembles

2. Exemples

EX4 : L'ensemble des élèves de notre classe
EX5 : L'ensemble des professeurs de notre école
EX6 : L'ensemble des chiffres 0,1,2,3,4,5,6 ,7,8,9
EX7 : L'ensemble des théorèmes de cours de géométrie destiné aux élèves de cinquième année.
EX8 : L'ensemble des classes (élèves) de notre école
EX9 : L'ensemble des classes (locaux) de notre école

3. Un ensemble est déterminé quand on sait quels objets le constituent, quels sont ses éléments

EX10 : Les objets de l'ensemble défini dans EX4 sont des élèves
EX11 : Les éléments de l'ensemble défini dans EX6 sont des chiffres
EX12 : Les objets de l'ensemble défini dans EX8 sont des classes d'élèves
EX13 : Les éléments de l'ensemble défini dans EX9 sont des locaux
EX14 : Tout ensemble est un objet

4. Eléments

Au lieu de dire que tel objet est élément d'un ensemble, on dit que cet objet appartient à cet ensemble ou que cet ensemble comprend cet objet
EX15 : Le chiffre 5 appartient à l'ensemble défini dans EX6
EX16 : Jean-Pierre Verbeque appartient à l'ensemble défini dans EX5, mais il n'appartient pas à l'ensemble défini dans EX6.

5. Termes - Egalité

Les objets sont souvent représentés par des termes qui sont des signes ou des assemblages de signes
EX17 : 2, 4, 2+2, 8+1… sont des termes qui rétrésentent respectivement le nombre deux, le nombre quatre, le nombre quatre, le nombre neuf…

Si deux termes désignent le même objet, on dit qu'ils sont égaux et on signale ce fait au moyen du signe =
EX 18: $6 = 2 \times 3$

Dans le cas contraire, on utilise le signe ≠
EX 19: $6 \neq 2 + 3$

[1] Texte largement inspiré de Mathématique Moderne 1, de Georges Papy, Editions Didier

Les ensembles sont souvent notés par des lettres (latines majuscules)

EX20 : Si A désigne l'ensemble comprenant les seuls nombres -2, -1, 0, 1, 2
B désigne l'ensemble des nombres entiers dont le carré est inférieur à 4
C désigne l'ensemble des naturels inférieurs à 10
Alors $A = B \neq C$

6. Propriétés de l'égalité

Quels que soient les objets désignés par les lettres a, b et c :

$a = a$ (réflexivité de l'égalité)
si $a = b$ alors $b = a$ (symétrie de l'égalité)
si $a = b$ et $b = c$ alors $a = c$ (transitivité de l'égalité)

7. Le signe d'appartenance

Voici a un objet et E un ensemble

Si l'objet a appartient à l'ensemble E, on écrit $a \in E$
et dans le cas contraire $a \notin E$

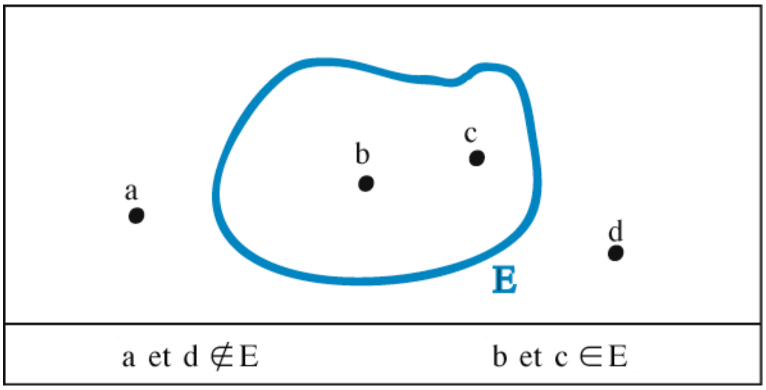
Si E est un ensemble, on a, pour tout objet a, une et une seule des éventualités :

$a \in E$ ou $a \notin E$

8. Fabriquons des ensembles suivant notre fantaisie

EX21 : $\{$ Mickey , JP Verbeque , cette craie rouge $\}$

9. Schéma, diagramme de Venn



L'ensemble E est représenté par une corde nouée et tout objet est représenté par un point. Les éléments de E sont dessinés à l'intérieur de la corde, les objets qui n'appartiennent pas à E sont dessinés à l'extérieur de la corde. Aucun objet n'est représenté par un point situé sur la corde.

EX22 : John Venn (1834-1923),
mathématicien et logicien britannique

10. Définition en compréhension – définition en extension

Un ensemble est défini en compréhension quand on le définit en énonçant une propriété caractéristique de ses éléments, c'est-à-dire une propriété que possèdent tous ses éléments et qu'ils sont seuls à posséder .

EX23 : L'ensemble des nombres naturels impairs
$= \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x \text{ est impair}\}$

Un ensemble est défini en extension lorsque tous ses éléments sont cités

EX24 : L'ensemble des diviseurs de 12 = div 12 = $\{1,2,3,4,6,12\}$

EX25 : Toutes ces écritures d'ensembles se feront avec souplesse et bonne volonté.
$\{1,3,5,7,\dots\}$ = l'ensemble des nombres naturels impairs
$\{1,3,5,7,\dots,43\}$ = l'ensemble des impairs inférieurs à 43.

11. Paires, singletons, ensemble vide

Paire = Ensemble qui comprend exactement deux éléments
Singleton = Ensemble qui comprend exactement un élément
Ensemble vide = Ensemble sans élément

EX26 : Exemple de paire, de singleton et d'ensemble vide

12. Egalité pour les ensembles

A = B ssi les mêmes objets appartiennent à A et à B
ssi pour tout objet t, on a la même réponse aux questions
t appartient-il à A ?, t appartient-il à B ?

EX27 : Il n'existe qu'un seul ensemble vide. noté $\varnothing$

13. Exercices

EX28 : Donne plusieurs termes qui représentent l'objet que voici : « le nombre 25 »

EX29 : $\{\text{ Jean , Jacques }\} = \{\text{ Jacques , Jean }\} = \{\text{Jacques , Jacques , Jean , Jacques }\}$

EX30 : L'ensemble $\{a,b\}$ est-il une paire ?

EX31 : L'ensemble des nombres naturels est noté $\mathbb{N}$ ou IN ou $\underset{\sim}{N}$ ou N
On écrira ainsi : $\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ est un nombre naturel}\} = \{\ 0\ ,1\ ,2\ ,3\ ,\dots\ \}$

EX32 : Définis en extension l'ensemble des naturels pairs strictement compris entre 23 et 31

EX33 : Donne une définition en compréhension de l'ensemble $\{1,2,4,8,16\}$.

EX34 : Désignons par div 12 l'ensemble des diviseurs (naturels) de 12 .
On a donc $\text{div } 12 = \{x \mid x \text{ est un diviseur de } 12\} = \{1,2,3,4,6,12\}$
Définis div 20
Représente div 12 et div 20 à l'aide de diagrammes de Venn
Détermine encore div 2, div 1 et div 0

EX35 : L'ensemble des multiples naturels de 6 = $\{6n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$= \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \text{ est un diviseur de } x\} = \{0,6,12,18,\dots\}$. Il est aussi noté $6\mathbb{N}$.

EX36 : Un nombre naturel p est dit **premier** si et seulement si div p est une paire
Ainsi, 3 est premier mais 1 n'est pas premier car div 1 est un singleton.

EX37 : Une autre explication du sens du terme **premier**.