

6. Systèmes de numération

1. Compléter

	décimal	binaire	trinaire	octal	hexa décimal
zéro	0	0	0	0	0
un	1	1	1	1	1
deux	2		2	2	2
trois	3			3	3
quatre	4			4	4
cinq	5			5	5
six	6			6	6
sept	7			7	7
huit	8				8
neuf	9				9
dix					A
onze					B
douze					C
treize					D
quatorze					E
quinze					F
seize					
dix-sept					
dix-huit					
dix-neuf					
vingt					
vingt et un					
vingt-deux					
vingt-trois					
vingt-quatre					
vingt-cinq					
vingt-six					
vingt-sept					
vingt-huit					
vingt-neuf					
trente					
trente et un					
trente-deux					
trente-trois					
etc ...					

2. Et voilà...

	décimal	binaire	trinaire	octal	hexa décimal
zéro	0	0	0	0	0
un	1	1	1	1	1
deux	2	10	2	2	2
trois	3	11	10	3	3
quatre	4	100	11	4	4
cinq	5	101	12	5	5
six	6	110	20	6	6
sept	7	111	21	7	7
huit	8	1000	22	10	8
neuf	9	1001	100	11	9
dix	10	1010	101	12	A
onze	11	1011	102	13	B
douze	12	1100	110	14	C
treize	13	1101	111	15	D
quatorze	14	1110	112	16	E
quinze	15	1111	120	17	F
seize	16	10000	121	20	10
dix-sept	17	10001	122	21	11
dix-huit	18	10010	200	22	12
dix-neuf	19	10011	201	23	13
vingt	20	10100	202	24	14
vingt et un	21	10101	210	25	15
vingt deux	22	10110	211	26	16
vingt trois	23	10111	212	27	17
vingt quatre	24	11000	220	30	18
vingt cinq	25	11001	221	31	19
vingt six	26	11010	222	32	1A
vingt sept	27	11011	1000	33	1B
vingt huit	28	11100	1001	34	1C
vingt neuf	29	11101	1002	35	1D
trente	30	11110	1010	36	1E
trente et un	31	11111	1011	37	1F
trente deux	32	100000	1012	40	20
trente trois	33	100001	1020	41	21
etc

3. Décoder

- EX1 : Dans le système décimal, les nombres s'écrivent à l'aide des dix chiffres :
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
Zéro s'écrit 0, un s'écrit 1, deux s'écrit 2, ..., neuf s'écrit 9, dix s'écrit 10 etc...
Le nombre 1905 se décode de la manière suivante :
 $1905 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
ou encore plus simplement $1905 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5$
En le traduisant en latin ☺ : $1905 = 1 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 5$
ce qui lui donne un look de polynôme.
Nous verrons sans doute, plus loin, l'intérêt de cette vision.
x est la base du système de numération, ici : x = dix
- EX2 : Le système binaire est le système de base deux.
Dans ce système, les nombres s'expriment avec les chiffres 0 et 1.
Zéro s'écrit 0, un s'écrit 1, deux s'écrit 10 etc...
Décodons : $1101 = 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 1$.
Ce qui se traduit en décimal : $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 8 + 4 + 1 = 13$.
Ainsi : $[1101]_2 = [13]_{10}$
- EX3 : En système trinaire (= de base trois), il y a trois chiffres : 0, 1 et 2.
Zéro s'écrit 0, un s'écrit 1, deux s'écrit 2, trois s'écrit 10 etc...
 $[2012]_3 = [2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2]_3 = [2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2]_{10} = [54 + 3 + 2]_{10} = [59]_{10}$
- EX4 : En système octal (= de base huit), il y a sept chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.
Zéro s'écrit 0, un s'écrit 1, deux s'écrit 2, ..., sept s'écrit 7, huit s'écrit 10 etc...
Vérifiez que $[7436]_8 = [3870]_{10}$.
- EX5 : En système hexadécimal (= de base seize), on utilise seize chiffres.
Ils s'écrivent 0, 1, 2, 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A, B, C, D, E et F.
Zéro s'écrit 0, un s'écrit 1, ..., neuf s'écrit 9, dix s'écrit A, ..., quinze s'écrit F, seize s'écrit 10 etc...
 $[D5A2]_{16} = [D \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + A \cdot 10 + 2]_{16} = [13 \cdot 16^3 + 5 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16 + 2]_{10} = [54690]_{10}$
- EX6 : Observons que $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = (((ax + b)x + c)x + d)x + e$.
Par économie de parenthèses nous écrirons aussi :
 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = (ax + b)(x + c)(x + d)x + e$

Ainsi : $[3412]_5 = [3 \cdot 5 + 4] \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 2]_{10} = [482]_{10}$
- EX7 : Ecrivez en décimal :
le binaire 11100110
l'octal 74502
l'hexadécimal FACADE

4. Coder

EX8 : Le développement

$$\begin{aligned} & [32465]_7 \\ & = [3 \cdot 7 + 2) \cdot 7 + 4) \cdot 7 + 6) \cdot 7 + 5]_{10} \\ & = [8132]_{10} \end{aligned}$$

nous montre que

si on divise 8132 c'est-à-dire $3 \cdot 7 + 2) \cdot 7 + 4) \cdot 7 + 6) \cdot 7 + 5$ par 7 alors le quotient est $3 \cdot 7 + 2) \cdot 7 + 4) \cdot 7 + 6$ et le reste est **5**.

si on divise $3 \cdot 7 + 2) \cdot 7 + 4) \cdot 7 + 6$ par 7

alors le quotient est $3 \cdot 7 + 2) \cdot 7 + 4$ et le reste est **6**.

si on divise $3 \cdot 7 + 2) \cdot 7 + 4$ par 7 alors le quotient est $3 \cdot 7 + 2$ et le reste est **4**.

si on divise $3 \cdot 7 + 2$ par 7 alors le quotient est 3 et le reste est **2**.

si on divise 3 par 7 alors le quotient est 0 et le reste est **3**.

Dès lors, pour coder le décimal 8132 en base 7, il suffit de diviser 8132 par 7 ainsi que ses quotients successifs, jusqu'à obtenir un quotient nul. La suite des restes obtenus, recopiés dans le sens contraire de leur découverte, fournit les chiffres de l'écriture recherchée.

Un schéma :

$$\begin{array}{r|l} 8132 & 7 \\ \hline 7 & 1161 \\ \hline 11 & 7 \\ 7 & 46 \\ \hline 43 & 42 \\ 42 & 41 \\ \hline 12 & 35 \\ 7 & 6 \\ \hline 5 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1161 & 7 \\ \hline 7 & 165 \\ 46 & 14 \\ \hline 42 & 25 \\ 41 & 21 \\ \hline 35 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 165 & 7 \\ \hline 7 & 23 \\ 14 & 21 \\ \hline 25 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 23 & 7 \\ \hline 7 & 3 \\ 21 & 0 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 7 \\ \hline 7 & 0 \\ 0 & \end{array}$$

← 32465

EX9 : Traduire le décimal 8132

- en binaire
- en trinaire
- en octal
- en duodécimal
- en hexadécimal