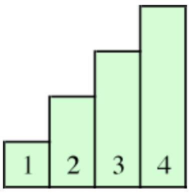
Sommes

§1. Somme des n premiers nombres entiers strictement positifs

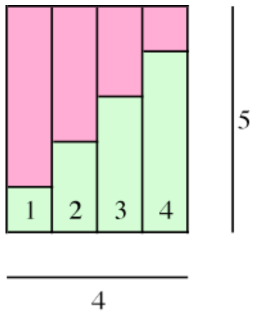
a. vision

Souvenons-nous des réglettes Cuisenaire qui ont bercé notre enfance.

A la couleur près, l'escalier que voici représente la somme 1 + 2 + 3 + 4 .



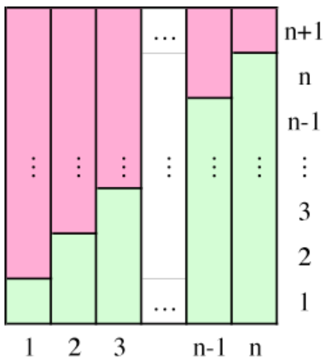
En doublant cet escalier, on réalise le rectangle



Ainsi: $$2\times(1+2+3+4)=4\times 5$$

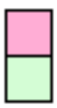
et $$\boxed{1+2+3+4=\frac{4\times 5}{2}}$$

On étend facilement ce résultat à des escaliers qui ont un nombre entier quelconque non nul n de marches



$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

y compris à l'escalier qui n'a qu'une seule marche



$$1=\frac{1\times 2}{2}$$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

D'une manière plus professionnelle, nous écrivons:

$$\boxed{\sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{2} n(n+1)}$$

b. calculs

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & & \\
S & = & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 & & \\
\hline
2S & = & 5 & + & 5 & + & 5 & + & 5 & = & 4x5
\end{array}
$$

$$\vdash S = \frac{4 \times 5}{2}$$

EX: Observez la géométrie qui se cache derrière ce calcul.
C'est celle de l'escalier qu'on double.

EX: Certains pourraient croire que ce calcul est plus efficace que la vision géométrique développée précédemment et qu'il est le fruit d'une simple astuce qui consiste à renverser l'ordre de l'addition des nombres. C'est perdre de vue que c'est la vision géométrique qui a inspiré l'astuce.

On généralise sans peine :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\
S & = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \\
 & = & n(n+1) & & & & & & & &
\end{array}
$$

$$\vdash S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Voici une autre manière de calculer ce même résultat.

Développons successivement:

1^2	=	$(0+1)^2$	=	0^2	+	2*0	+	1
2^2	=	$(1+1)^2$	=	1^2	+	2*1	+	1
3^2	=	$(2+1)^2$	=	2^2	+	2*2	+	1
...		...		...		...		...
n^2	=	$(n-1+1)^2$	=	$(n-1)^2$	+	2*(n-1)	+	1
$(n+1)^2$	=	$(n+1)^2$	=	n^2	+	2*n	+	1

Additionnons les élements de la colonne de gauche ainsi que ceux de la colonne de droite.
Les termes surfacés en rose disparaissent et nous obtenons:

1^2	=	$(0+1)^2$	=	0^2	+	2*0	+	1
2^2	=	$(1+1)^2$	=	1^2	+	2*1	+	1
3^2	=	$(2+1)^2$	=	2^2	+	2*2	+	1
...		...		...		...		...
n^2	=	$(n-1+1)^2$	=	$(n-1)^2$	+	2*(n-1)	+	1
$(n+1)^2$	=	$(n+1)^2$	=	n^2	+	2*n	+	1
$(n+1)^2$	=	2*(1 + 2 + 3 + ... + n)					+	(n+1)

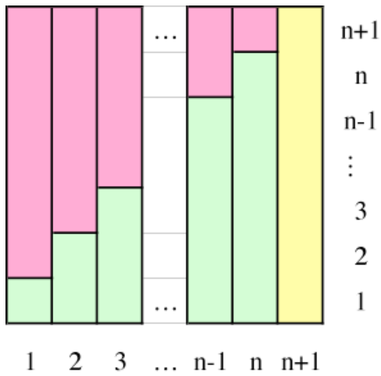
Par conséquent :

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}=(n+1)\frac{n+1-1}{2}$$

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

La formule $(n+1)^2 = 2(1+2+3+\ldots+n)+(n+1)$ obtenue après le calcul laborieux de la page précédente est en réalité tout à fait triviale dès qu'on imagine sa géométrie.

Il suffit d'examiner le dessin :

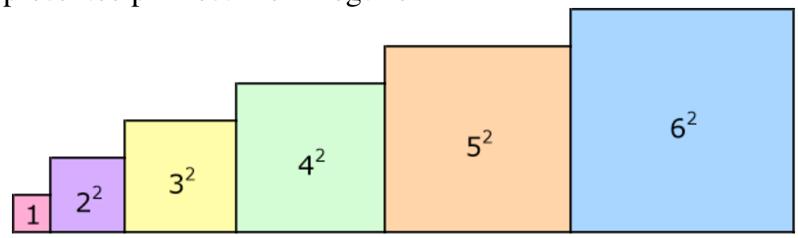


Le carré $(n+1)^2$ est obtenu
en complétant le double escalier $2(1+2+3+\ldots+n)$ avec la réglette $(n+1)$.
C'est-à-dire $(n+1)^2 = 2(1+2+3+\ldots+n)+(n+1)$.

§2. Somme des carrés des n premiers nombres entiers strictement positifs

On s'intéresse, par exemple, à la somme $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$.

Elle peut être représentée par l'escalier irrégulier



Cette fois, aucun agencement de ces carrés, qui fournisse une figure sympathique, n'apparaît spontanément. Nous devons donc nous résoudre à recourir au calcul, inspirés que nous sommes par le calcul laborieux des pages précédentes.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1^3 & = & (0+1)^3 & = & 0^3 & + & 3\cdot 0^2\cdot 1 & + & 3\cdot 0\cdot 1^2 & + & 1 \\
2^3 & = & (1+1)^3 & = & 1^3 & + & 3\cdot 1^2 & + & 3\cdot 1 & + & 1 \\
3^3 & = & (2+1)^3 & = & 2^3 & + & 3\cdot 2^2 & + & 3\cdot 2 & + & 1 \\
\dots & & \dots & & \dots & & & & & & \dots \\
n^3 & = & ((n-1)+1)^3 & = & (n-1)^3 & + & 3\cdot(n-1)^2 & + & 3\cdot(n-1) & + & 1 \\
(n+1)^3 & = & (n+1)^3 & = & n^3 & + & 3\cdot n^2 & + & 3\cdot n & + & 1
\end{array}
$$

En additionnant les membres extrêmes de ces égalités et en simplifiant tout ce qui peut l'être, nous obtenons successivement :

$$(n+1)^3 = 3\sum_{x=1}^{n} x^2 + 3\sum_{x=1}^{n} x + (n+1)$$

$$3\sum_{x=1}^{n} x^2 = (n+1)^3 - 3\sum_{x=1}^{n} x - (n+1)$$

$$3\sum_{x=1}^{n} x^2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)$$

$$3\sum_{x=1}^{n} x^2 = (n+1)\left((n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1\right) = (n+1)\left(n^2 + \frac{n}{2}\right)$$

$$3\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\boxed{\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

Et voilà qui est fait !

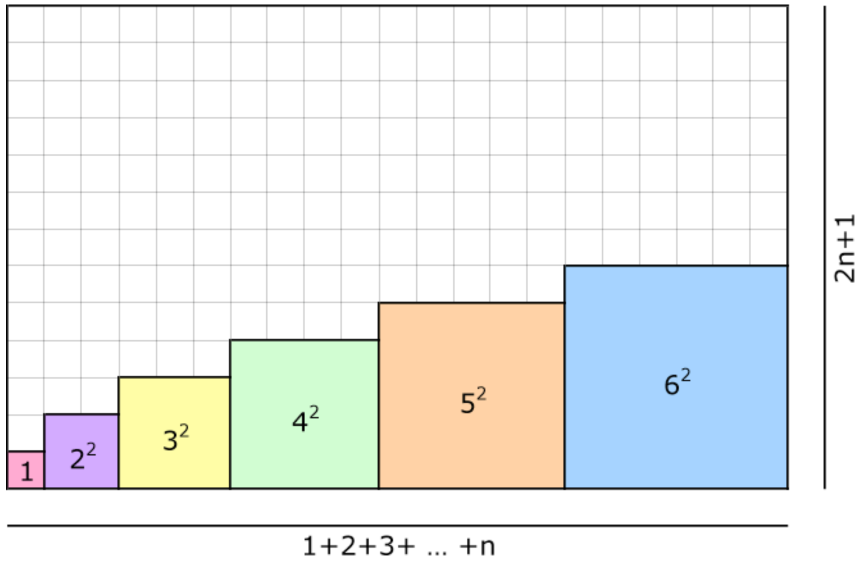
L'étape $3\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ du calcul précédent attire notre attention parce qu'elle

peut s'écrire $$3\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)}{2}(2n+1)$$

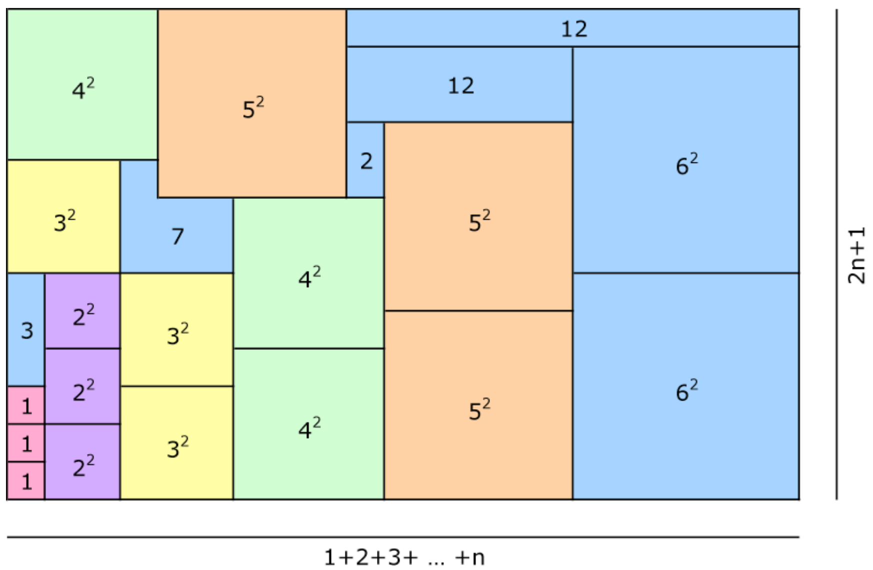
dont le membre de droite représente un joli rectangle

Ainsi, trois escaliers irréguliers à n marches devraient pouvoir remplir exactement un rectangle de longueur $(1+2+3+\ldots+n)$ et de largeur $(2n+1)$.

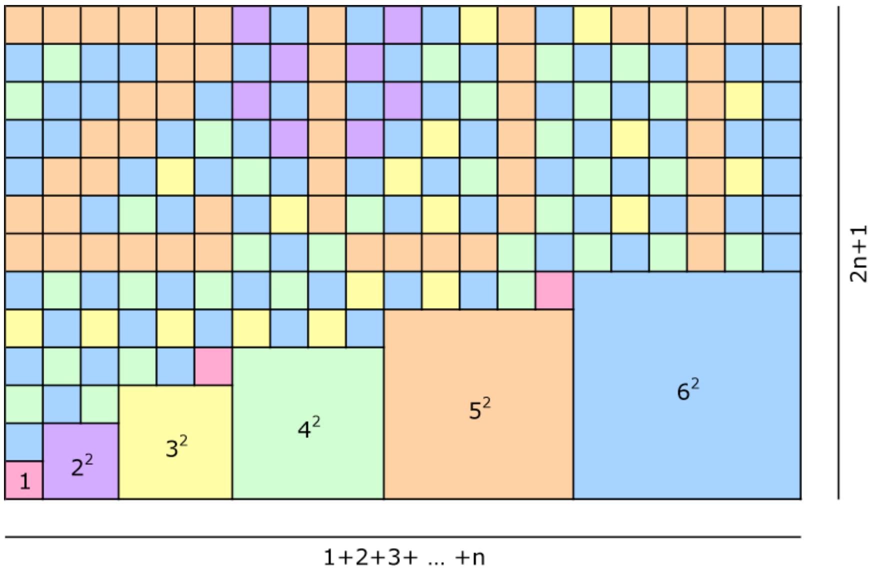
Tentons l'aventure pour n = 6.



Par exemple:

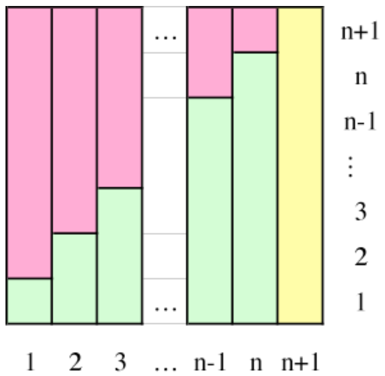


Cette façon de faire n'a aucun intérêt. Pas plus que celle-ci,



parce que le but d'une représentation géométrique est de permettre de voir clairement, à l'oeil nu, la réalité d'un phénomène. Dans ce cas-ci, de voir que ce rectangle est bien consttué de trois escaliers et de réaliser que c'est ainsi quel que soit le nombre de ses marches.

C'est la vision

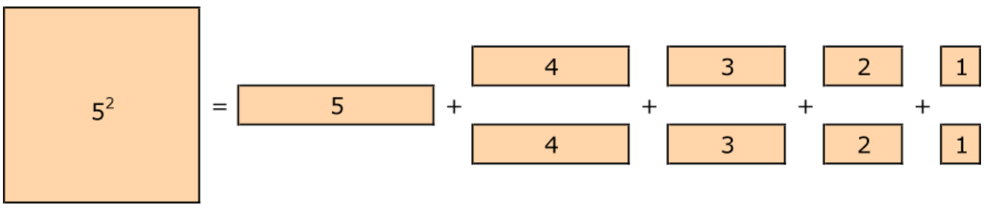


et la formule qui y est attachée

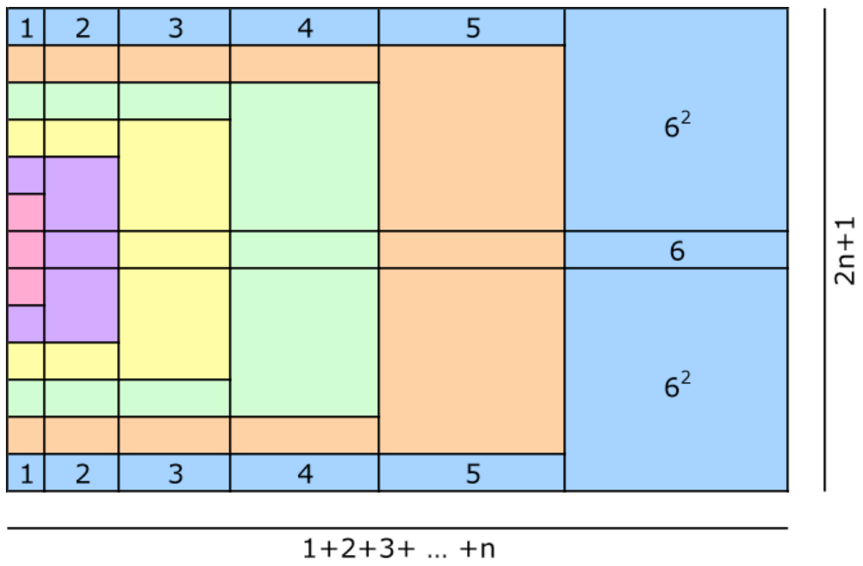
$$(n+1)^2 = (n+1) + 2(1+2+3+\ldots+n)$$

qui vont nous permettre d'atteindre l'objectif.

Ainsi,



permet de remplir harmonieusement le rectangle de la manière suivante :



On réécrit le résultat:

$$3\sum_{x=1}^{n} x^2 = (1+2+\ldots+n)(2n+1)$$

$$3\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)}{2}(2n+1)$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Remarque:
La construction ci-dessus a été imaginée par mon ami Jean-Claude Matthys, le 20 mars 1990. Il me l'a transmise lors d'une de nos nombreuses séances de travail hebdomadaires.

§3. Somme des cubes des n premiers nombres entiers strictement positifs

Se souvenant de la formule $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, on a :

1^4	$=$											1
2^4	$=$	$(1+1)^4$	$=$	1^4	$+$	$4\cdot 1^3$	$+$	$6\cdot 1^2$	$+$	$4\cdot 1$	$+$	1
3^4	$=$	$(2+1)^4$	$=$	2^4	$+$	$4\cdot 2^3$	$+$	$6\cdot 2^2$	$+$	$4\cdot 2$	$+$	1
	$\dots$										$\dots$	
n^4	$=$	$\dots$	$=$	$(n-1)^4$	$+$	$4\cdot(n+1)^3$	$+$	$6\cdot(n-1)^2$	$+$	$4\cdot(n-1)$	$+$	1
$(n+1)^4$	$=$	$\dots$	$=$	n^4	$+$	$4\cdot n^3$	$+$	$6\cdot n^2$	$+$	$4\cdot n$	$+$	1

et imitant les calculs des paragraphes précédents, on obtient sans difficulté :

$$(n+1)^4 = 4\sum_{x=1}^{n} x^3 + 6\sum_{x=1}^{n} x^2 + 4\sum_{x=1}^{n} x + (n+1)$$

$$4\sum_{x=1}^{n} x^3 = (n+1)^4 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

etc …

$$4\sum_{x=1}^{n} x^3 = n^2(n+1)^2 ; \ \sum_{x=1}^{n} x^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\boxed{\sum_{x=1}^{n} x^3 = \left(\sum_{x=1}^{n} x\right)^2}$$

Illustration basée sur le fait que $n^3 = n$ fois n^2 :