2. Parties

1. Parties d'un ensemble
Conformément au langage usuel, nous dirons que l'ensemble B des élèves de la classe d'origine bulgare est une partie de l'ensemble C des élèves de la classe. On signale ce fait en notant : $B \subset C$

En général, on appelle **partie d'un ensemble E** tout ensemble P d'éléments de E.
On signale que P est une partie de E par la formule $P \subset E$

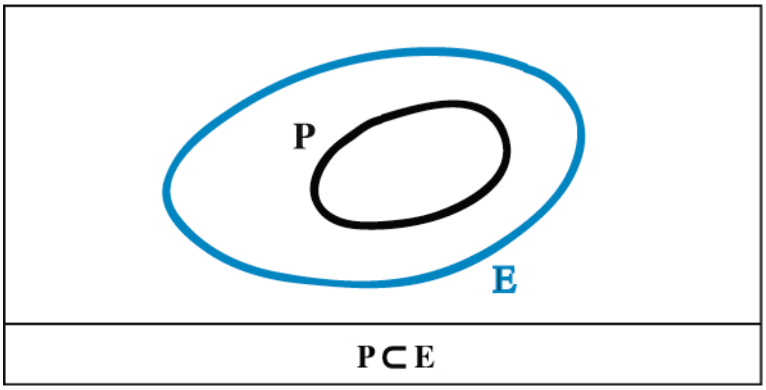
EX1 : Comme E est un ensemble d'éléments de E, on a : $E \subset E$

Toute partie de E, différente de E est dite **propre**.

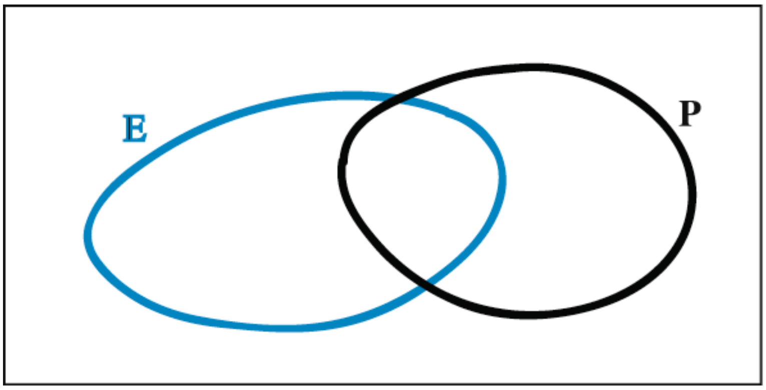
EX2 : Comme Ø est un ensemble vide d'éléments de E, on a : $\varnothing \subset E$.
Si on n'est pas convaincu par l'argument ci-dessus, il y a moyen de prouver que $\varnothing \subset E$ par un raisonnement logique.

On exprime encore que P est une partie de E en disant que **P est inclus dans E**.
Le signe $\subset$ est appelé **le signe d'inclusion**.
Au lieu d'écrire $P \subset E$, on écrit encore $E \supset P$, ce qui se lit **E contient P**.

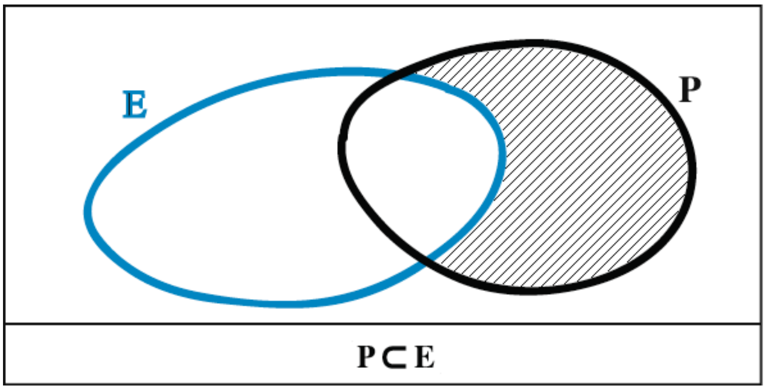
EX3 : diagrammes de Venn



Le shéma général que voici



n'est pas incompatible avec $P \subset E$. Il suffit de hachurer la plage vide



EX4 : Voici A et B des ensembles.

$A \subset B$ ssi Tout élément de A est élément de B

ssi $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$

EX5 : Vérifie les formules

$\text{div } 18 \subset \text{div } 36 \subset \text{div } 108 \subset \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \supset 2\mathbb{N} \supset 6\mathbb{N} \supset \{0\}$

2. Propriétés de l'inclusion

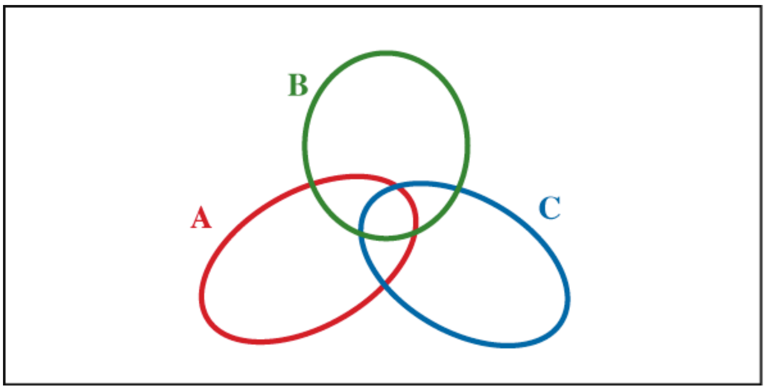
Quels que soient les ensembles désignés par les lettres A, B et C :

$A \subset A$ (réflexivité de l'inclusion)

Si $A \subset B$ et $B \subset A$ Alors $A = B$ (antisymétrie de l'inclusion)

Si $A \subset B$ et $B \subset C$ Alors $A \subset C$ (transitivité de l'inclusion)

EX6 : En hachurant les plages vides du diagramme suivant, démontre la transitivité de l'inclusion.



- diagramme en feuilles de trèfle –

EX7 : A l'aide d'un diagramme de Venn, démontre l'antisymétrie de l'inclusion.

3. Ensemble des parties d'un ensemble

Voici a, b et c des objets distincts.
Considérons l'ensemble E formé de ces objets.
Ainsi : $E = \{a, b, c\}$

Enumérons toutes les parties de E, par exemple en les classant d'après le nombre de leurs éléments.

Il y a les parties à 0 élément : Ø
à 1 élément : $\{a\}, \{b\}$ et $\{c\}$
à 2 éléments : $\{a, b\}, \{b, c\}$ et $\{c, a\}$
à 3 éléments : E

Il n'y a pas de partie à 4 éléments…

On désigne par $\wp E$ l'ensemble des parties de E.

Ainsi : $\wp E = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, E\} = \{P | P \subset E\}$

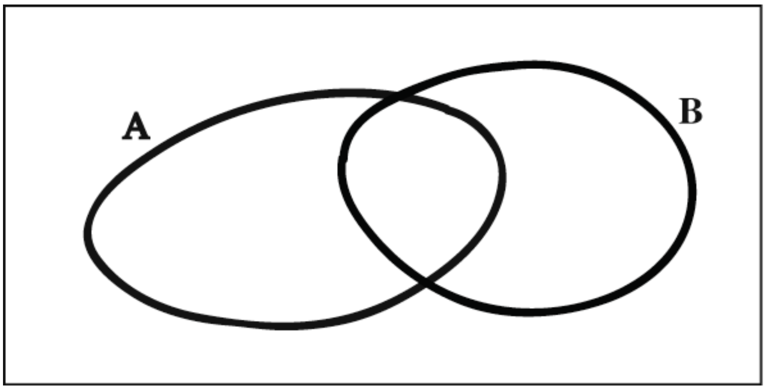
On observe que toute partie d'un ensemble est un objet et que $\wp E$ désigne l'ensemble des parties de E

EX8 : Pour tout ensemble A : $A \subset E$ ssi $A \in \wp E$

EX9 : Définis en extension $\wp\{a, b, c, d\}$, $\wp\{a\}$ et $\wp\varnothing$

EX10 : Si A et B sont des ensembles, ou bien A est une partie de B, ce qui se note $A \subset B$, ou bien A n'est pas une partie de B, ce qui se note $A \not\subset B$.
Mais si $A \not\subset B$, il ne faut pas en conclure que $B \subset A$.

EX11 : Les ensembles A et B sont représentés par le schéma général



- diagramme en papillon -

On nous signale que $A \not\subset B \not\subset A$.
Porte cette information sur le schéma en y dessinant exactement deux points.

EX12 : Réalise un diagramme en feuilles de trèfle représentant les ensembles
A = div 6, B = div 35 et C = div 143.

EX13 : Quel est le nombre de plages défini par un simple diagramme de Venn ?
Même question pour un diagramme en papillon.
Même question pour un diagramme en feuilles de trèfle.

EX14 : Sachant que a, b, c, d sont quatre éléments distincts, explique pourquoi le nombre d'éléments de $\wp\{a, b, c, d\}$ est le double du nombre d'éléments de $\wp\{a, b, c\}$.
Tires-en une règle générale.