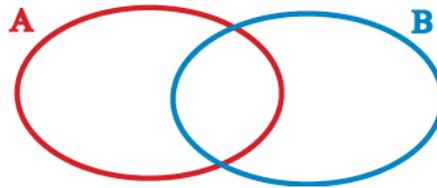


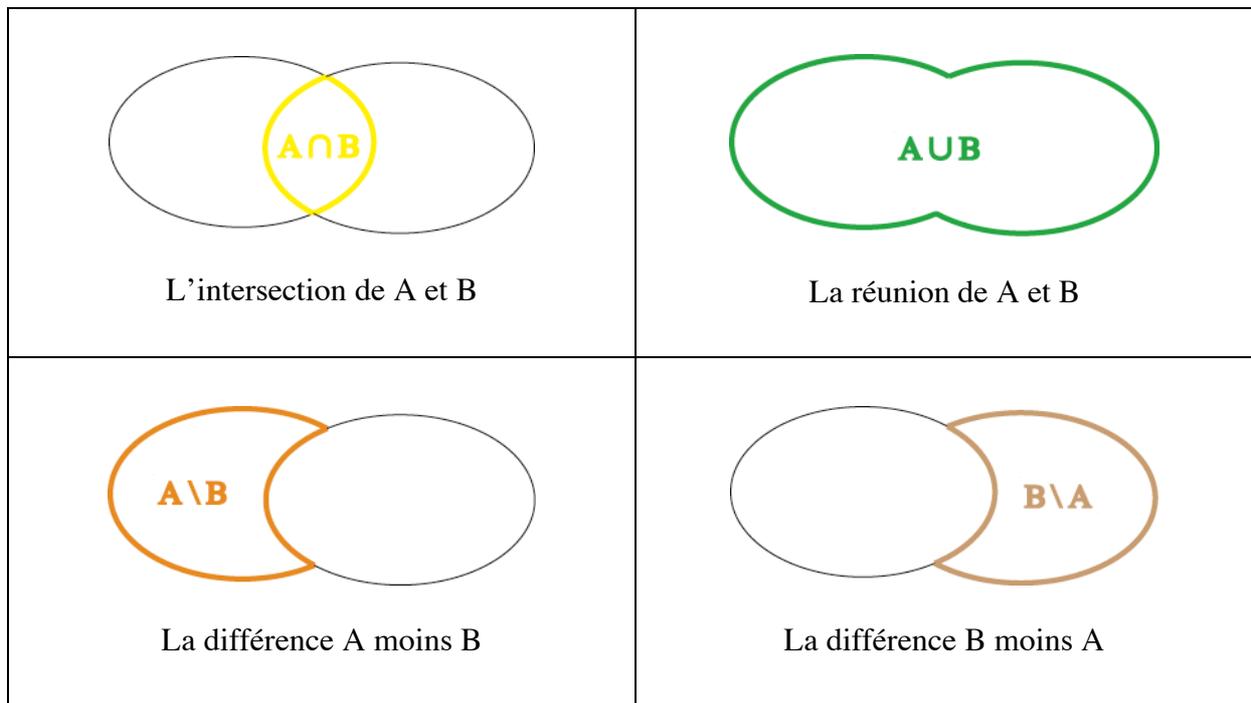
3. Intersection — Réunion — Différence

Voici des ensembles A et B.

Ils peuvent être représentés par le schéma



Ce schéma met en évidence de nouveaux ensembles.



Définitions`

L'intersection $A \cap B$ est l'ensemble des objets qui sont à la fois éléments de A et de B.

La réunion $A \cup B$ est l'ensemble des objets qui sont éléments de l'un au moins des ensembles A, B.

La différence $A \setminus B$ est l'ensemble des objets qui sont éléments de A et non de B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\} \text{ se lit « A inter B »}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \text{ se lit « A union B »}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} \text{ se lit « A moins B »}$$

EX1 : si $A \cap B = \emptyset$ alors on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

EX2 : $A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$ (démonstration à l'aide de diagrammes en papillon).

EX3 : $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

EX4 : $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

EX5 : $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, mais en général il est faux que $A \setminus B = B \setminus A$

EX6 : $A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A = B$

EX7 : Insistons encore sur le sens du « ou » en mathématique.

4. Algèbre des ensembles

EX1 : Le diagramme en feuilles de trèfle convient dans tous les cas pour représenter trois ensembles.

EX2 : L'intersection et la réunion sont associatives.

C'est-à-dire, quels que soient les ensembles A, B et C :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

EX3 : La différence n'est pas associative.

Il suffit de comparer $(A \setminus B) \setminus C$ et $A \setminus (B \setminus C)$.

EX4 : Quels que soient les ensembles A, B et C : $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

EX5 : L'intersection distribue la réunion et la réunion distribue l'intersection.

C'est-à-dire, quels que soient les ensembles A, B et C :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

EX6 : La commutativité de \cup et \cap nous permet de déduire de l'EX5 :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

EX7 : Un peu de sport ! Etant donnés quatre ensembles A, B, C et D, on a :

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$$

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$$

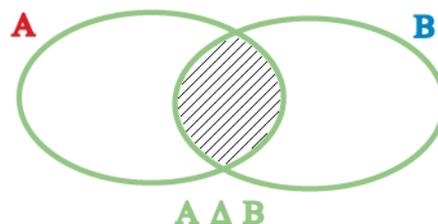
EX8 : La différence est antidistributive par rapport à \cup et \cap .

C'est-à-dire, quels que soient les ensembles A, B et C :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

La différence symétrique des ensembles A et B, notée $A \Delta B$, égale l'ensemble des objets qui appartiennent à un et un seul des ensembles A, B.



EX9 : $A \Delta B = \{x \mid x \in A \setminus B \text{ ou } x \in B \setminus A\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

EX10 : La différence symétrique est associative.

C'est-à-dire, quels que soient les ensembles A, B et C :

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$