# 5. Groupes

L'addition, la multiplication, la soustraction, la division des nombres entiers sont des exemples d'opérations ou de lois (de composition) binaires. Une loi associe un élément à certains couples d'éléments.

EX1 : L'addition associe le nombre 9 au couple (4,5).
4+5 est le résultat de la loi + appliquée au couple (4,5)

En général, on notera $a * b$ le résultat de la loi $*$ appliquée au couple (a,b).

> La loi de composition $*$ est interne et partout définie dans l'ensemble E
> ssi $*$ applique tout couple d'éléments de E sur un élément de E
> ssi $\forall(x,y) \in E, \exists! z \in E : z = x * y$
> ssi $*$ est une fonction de $E \times E$ dans E dont le domaine de définition égale $E \times E$
> ssi $* : E \times E \to E$ et $\mathrm{dom}* = E \times E$

EX2 : ppcm et pgcd sont des lois de composition internes et partout définies dans N.
EX3 : L'intersection, la réunion, la différence, la différence symétrique définissent des lois internes et partout définies dans l'ensemble $\wp E$ des parties de l'ensemble E.
EX4 : La fonction $\delta$ qui associe à un couple de points distincts du plan $\Pi$ l'unique droite du plan qui les comprend n'est pas interne dans $\Pi$ et n'est pas partout définie dans $\Pi$.

> Le couple $(G,*)$ est un groupoïde (ou un magma)
> ssi
> G est un ensemble et $*$ est une loi de composition interne et partout définie dans G

EX5 : $(\mathbb{N},+),(\mathbb{N},\cdot),(\mathbb{N},\mathrm{ppcm}),(\mathbb{N},\mathrm{pgcd}),(\wp E,\cap),(\wp E,\cup),(\wp E,\setminus),(\wp E,\Delta)$
sont des groupoïdes.
EX6 : $(\mathbb{N},-),(\mathbb{N},:),(\Pi,\delta)$ ne sont pas des groupoïdes
EX7 : La relation qui à un couple de personnes associe leur enfant donne-t-elle à l'ensemble des êtres humains une structure de groupoïde ?

> $(G,*)$ est un demi-groupe
> ssi
> $(G,*)$ est un groupoïde dont la loi est associative
> ssi
> $(G,*)$ est un groupoïde et $\forall a,b,c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$

EX8 : Parmi les lois rencontrées jusqu'ici, repérez celles qui sont associatives et celles qui ne le sont pas.
Je suggère la notation $a \wedge b$ pour désigner le plus grand commun diviseur de a et b, et la notation $a \vee b$ pour désigner le plus petit commun multiple de a et b.

| |
|---|
| e est élément neutre du groupoïde $(G,*)$ |
| ssi |
| $e \in G$ et $\forall x \in G : x * e = x = e * x$ |

EX9 : Citez les éléments neutres, s'ils existent, des multiples groupoïdes rencontrés dans ce cours.

EX10 : Le groupoïde $(\mathbb{Z},-)$ a un neutre à droite, mais pas à gauche. Prouvez-le.
Il n'a donc pas d'élément neutre.

| |
|---|
| $(G,*)$ est un demi-groupe unital |
| ssi |
| $(G,*)$ est un demi-groupe et G comprend un élément neutre pour la loi $*$ |

EX11 : $(\mathbb{N},+)$ et $(\mathbb{Z},\cdot)$ sont des demi-groupes unitaux

| |
|---|
| $(G,*)$ est un groupe |
| ssi |
| $(G,*)$ est un demi groupe unital dont la loi $*$ est symétrisable |
| ssi |
| $(G,*)$ est un demi groupe unital (de neutre e) et $\forall x \in G, \exists y \in G : x * y = e = y * x$ |

EX12 : Tout groupe est forcément non vide.

EX13 : Tout groupe comprend un élément neutre unique.
Il est par ailleurs l'unique neutre à gauche et l'unique neutre à droite.

EX14 : Dans un groupe, tout élément admet un symétrique, par définition. Ce symétrique est unique.
Il est par ailleurs l'unique symétrique à gauche et l'unique symétrique à droite.

EX15 : Dans un groupe $(G,*)$, $\forall a,b \in G, \exists! x \in G, \exists! y \in G : a * x = b = y * a$.
Si de plus la loi est commutative, alors x = y.

EX16 : Le neutre d'un groupe $(G,*)$ est son seul idempotent, c'est-à-dire le seul élément x de G tel que $x * x = x$.

EX17 : Dans un groupe $(G,*)$, tout élément est le symétrique de son symétrique.

EX18 : Notons $\overline{x}$ le symétrique de x.
Dans un groupe $(G,*)$, $\forall x,y \in G : \overline{x * y} = \overline{y} * \overline{x}$

EX19 : Si a,b,c sont des éléments du groupe $(G,*)$
Alors $a * c = b * c \Rightarrow a = b$ et $a * b = a * c \Rightarrow b = c$.
Cette propriété est appelée *simplifiabilité* des groupes.

La propriété réciproque $a = b \Rightarrow a * c = b * c$ et $b = c \Rightarrow a * b = a * c$
vient de la logique élémentaire.