Linéarité, quand tu nous tiens…

Voici un ensemble E

E est un **espace vectoriel réel**
ssi
E est équipé d'une loi $+ : E \times E \to E, (a,b) \mapsto a + b$ qui fait de lui un groupe commutatif
et d'une loi $\cdot : R \times E \to E, (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$ (noté αx) qui vérifie les quatre conditions suivantes:

$$\forall \lambda, \mu \in R, \forall x \in E : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$
$$\forall \lambda \in R, \forall x, y \in E : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$
$$\forall \lambda, \mu \in R, \forall x \in E : (\lambda \mu)x = \lambda(\mu x)$$
$$\forall x \in E : 1x = x$$

définition

Terminologie:
Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, les éléments de R sont appelés **scalaires.**

EX: Le plan pointé π_o , l'espace pointé E_o , le plan cartésien R^2 , R^3, … , R^n,
l'ensemble C des nombres complexes, l'ensemble des fonctions numériques réelles,
l'ensemble des fonctions numériques réelles continues,
l'ensemble des matrices carrées d'ordre n $(n \in N_o)$, …
sont des espaces vectoriels réels quand on les équipe de leurs lois habituelles.

EX: L'ensemble R^2 muni des lois
$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$
$$\lambda(a,b) = (\lambda a, 0)$$
n'est pas un espace vectoriel réel.

EX: L'ensemble des vecteurs du physicien n'est pas un espace vectoriel réel.

EX: L'ensemble R des nombres réels, avec son addition et sa multiplication habituelles, est un espace vectoriel. Ses éléments sont à la fois vecteurs et scalaires.

REM: Les appellations loi interne (pour +) et loi externe (pour ·) ne sont pas très heureuses.
On pourrait croire en effet qu'elles s'excluent l'une et l'autre. Il n'en est rien puisque la multiplication des réels est bel et bien interne et externe.
Plutôt que *loi externe* on préférera *loi scalaire* ou *multiplication scalaire*.

Voici E un espace vectoriel réel

Combinaison linéaire d'éléments de E
=
tout vecteur qui peut s'écrire $\lambda x + \mu y$, où $\lambda, \mu \in R$ et $x, y \in E$

définition

EX: Dans le plan usuel R^2,

$(3,4)$ est combinaison linéaire de $(1,0)$ et $(0,1)$

$(4,2)$ est combinaison linéaire de $(2,1)$

$(3,4)$ est combinaison linéaire de $(2,1)$ et $(1,2)$

Voici E un espace vectoriel réel et A une de ses parties

A **engendre** E
ssi
A est une **partie génératrice** de E
ssi
tout vecteur de E est combinaison linéaire d'éléments de A

définition

EX: Dans le plan usuel R^2,

$\{(3,4)\}$ engendre la droite d'équation $4x - 3y = 0$

$\{(0,0)\}$ engendre $\{(0,0)\}$

$\{(1,0),(0,1)\}$ engendre R^2

$\{(1,0),(0,1),(3,4)\}$ engendre R^2

$\{(3,4)\}$ n'engendre pas R^2

$\{(2,1),(3,4)\}$ engendre R^2

$\varnothing$ engendre $\{(0,0)\}$

EX: Dans R, tout singleton non nul engendre R, Le vide et le singleton nul engendrent {0}.

Voici E un espace vectoriel réel et A une de ses parties

A est **base** de E
ssi
A est une partie génératrice minimale de E

définition

EX: Base de R = singleton non nul de R
Base de R^2 = paire non neutralignée de R^2
Base de π_o = paire non neutralignée de π_o

Toutes les bases d'un espace vectoriel réel ont le même nombre d'éléments

théorème

Voici E un espace vectoriel réel

Dimension de E
=
Nombre d'éléments d'une base de E

définition

EX: R est de dimension 1, R^2 est de dimension 2, etc…

Voici E et F des espaces vectoriels réels et une fonction $f: E \to F$

f est **linéaire**
ssi
f conserve les combinaisons linéaires
ssi
$$\forall \lambda, \mu \in R,\ \forall x, y \in E:\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$
ssi
$$\begin{cases} \forall x, y \in E:\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall \lambda \in R,\ \forall x \in R:\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases}$$

définition

EX: Toute identité sur un espace vectoriel réel est linéaire.
Les rotations de π_o de centre 0 sont linéaires
Les rotations de π_o de centre $c \neq 0$ ne sont pas linéaires
Les translations de π_o de vecteur v non nul ne sont pas linéaires, celle de vecteur nul (la fonction identique) est linéaire.
Les homothéties de π_o sont linéaires.
Toute fonction linéaire transforme neutre additif en neutre additif.

Voici E et F des espaces vectoriels réels, E étant de dimension finie $n \in N_o$

Si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est une base de E et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une suite d'éléments de F
Alors il existe une et une seule fonction linéaire $f : E \to F$ telle que: $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\} : f(a_i) = b_i$

théorème

EX: Des tas de fonctions $R^2 \to R^2$ envoient la base canonique $((1,0),(0,1))$ sur le couple $((0,1),(-1,0))$, mais une seule d'entre-elles est linéaire.
C'est la rotation de R^2 de centre $(0,0)$ et d'angle 90°.

EX: Il existe une et une seule fonction linéaire de R dans R qui envoie 1 sur le réel k.
C'est l'homothétie de centre 0 et de rapport k, c'est-à-dire $f : R \to R, x \mapsto f(x) = kx$.

Les seules fonctions linéaires de R dans R sont les homothéties de R

On ne commettra donc plus les erreurs suivantes:

$(a+b)^2 = a^2 + b^2$

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$|a+b| = |a| + |b|$

$\sin(a+b) = \sin a + \sin b$

$\sin 2a = 2 \sin a$

$-(a+b) = -a + b$

etc…

Conclusion:

L'être humain éprouve un profond désir de linéarité,…
malheureusement la linéarité est très rare dans R.