Trois siècles avant notre ère, Euclide bâtissait la géométrie sur cinq postulats.
Il a fallu plus de 2 000 ans de réflexion et les travaux de Nicolas Lobatchevski pour comprendre toutes les implications du cinquième!
Une géométrie défiant le bon sens est née, qui nous gouverne encore.

D' Euclide aux géométries de l'impossible

par Maurice Arvonny

Depuis l'Antiquité, les *Eléments de géométrie*, d'Euclide, sont le modèle de I'Œuvre mathématique. En témoignent les *Eléments de mathématique*, de Nicolas Bourbaki. Cet ouvrage collectif inachevé par nature, écrit depuis cinquante ans par un groupe de mathématiciens français qui se renouvelle au cours des générations, a pour ambition de donner des fondations solides à l'ensemble des mathématiques. L'une de ses premières phrases est: «Ce qui était une démonstration pour Euclide en est toujours une à nos yeux.» Il n'est pas indifférent que le nom propre cité soit celui du géomètre grec, et que le titre du traité de Bourbaki fasse écho aux *Eléments de géométrie*, d'Euclide.

Vingt-trois siècles après ce mathématicien dont on ne sait à peu près rien - il pourrait bien, comme Homère ou... Bourbaki cacher plusieurs auteurs -, Euclide reste le modèle à suivre.

L'œuvre d'Euclide a longtemps été considérée non seulement comme un monument, mais aussi comme l'organisation méthodique et raisonnée de vérités inéluctables. Pour Kant il s'agissait en 1780 d'une «nécessité inévitable de la pensée». Mais, dès 1794, le jeune Carl Friedrich Gauss - alors âgé de 17 ans ! - avait démontré les principaux théorèmes de la géométrie non euclidienne. Il savait qu'à côté de la géométrie d'Euclide on pouvait en formuler une autre, tout aussi cohérente, tout aussi mathématiquement "vraie". Pourtant il garda toute sa vie par devers lui ses découvertes. La géométrie non euclidienne porte le nom de Nicolas Lobatchevski, lequel fut effectivement le premier à la rendre publique, mais bien plus tard, en 1827. La rendre publique, mais non la faire accepter.

Il fallut encore une quarantaine d'années pour que l'ensemble des mathématiciens placent sur un pied d'égalité les géométries d'Euclide et de Lobatchevski, lesquelles ne sont que deux exemples d'une famille plus large de Géométries. En 1872, l'Allemand Felix Klein donnait enfin une définition précise du mot "géométrie", en classait les diverses acceptions, et mettait le point final à la longue histoire de la géométrie non euclidienne .

C'est cette histoire que nous allons raconter ici. Première question qui vient à l'esprit : Pourquoi fut-elle si longue ?

Dès l'époque d'Euclide, la porte était entrouverte pour une Géométrie non euclidienne. Or, les mathématiciens s'acharnèrent à la fermer. Ce n'est qu'après des siècles de vains efforts qu'ils eurent l'audace de l'ouvrir entièrement. La raison en est clairement - et c'est une des grandes difficultés de la Géométrie non euclidienne - que cette Géométrie heurte le sens commun. Nous n'arrivons pas à concevoir qu'une droite soit autre chose que... ce que nous avons toujours cru - et ce que nous avons toujours cru est ce qu'Euclide nous a enseigné. Nos ancêtres à qui on expliquait que la Terre est ronde en déduisaient, bien à tort, que les Australiens marchaient la tête en bas, et refusaient d'accorder foi à pareilles sornettes. Nous aurions la même réaction si on nous affirmait à brûle-pourpoint que lorsqu'un quadrilatère a trois angles droits, le quatrième est nécessairement... aigu. Or, c'est là un théorème de la Géométrie de Lobatchevski, tout aussi cohérente que celle d'Euclide.

Quant à savoir quelle Géométrie décrit mieux le monde réel, c'est une question non mathématique. La relativité générale d'Einstein suggère que... ce n’est ni l'une ni l'autre.

Le point de départ est donc l'ouvrage d'Euclide. Non qu'il soit entièrement nouveau. Au contraire, il s'agit pour l'essentiel d'une compilation et d'une mise en forme de résultats déjà connus. Mais ce qui le distingue des textes antérieurs et fait sa grandeur, c'est la volonté affirmée de déduire les théorèmes d'un petit nombre de “postulats”. La géométrie est bien plus vieille qu'Euclide. De nombreux résultats étaient connus des Egyptiens et des Babyloniens plus de mille ans avant lui. “Géométrie” signifie “mesure de la Terre”, et c'était effectivement une nécessité pour ces peuples, après les inondations du Nil ou de l'Euphrate et du Tigre, qui recouvraient le sol d'un limon fertile mais brouillaient tous les repères, de savoir déterminer quelle parcelle revenait à chacun. Egyptiens et Babyloniens avaient ainsi développé toute une série de recettes plus ou moins exactes (le “théorème de Pythagore” en était une), mais ils ne s'étaient pas souciés de leur donner une architecture logique. La notion de démonstration n'apparaît qu'avec le Grec Thalès et s'affine au fur et à mesure des progrès de la logique. Avec les *Eléments* (environ 300 av. J.-C), elle devient parfaitement claire.

Euclide commence son exposé de la géométrie plane par des définitions et des axiomes, affirmations de vérités générales, du genre «des choses égales à une même chose sont égales entre elles», ou bien «le tout est plus grand que la partie». Il pose ensuite cinq postulats, spécifiques à la géométrie plane.

- Le premier dit que par deux points il passe une droite et une seule.
- Le second affirme qu'étant donnés deux segments de droite, on peut prolonger le premier par un segment qui a la longueur du second.
- Le troisième pose l'existence d'un cercle dont on donne le centre et un point.
- Le quatrième assure que tous les angles droits sont égaux.

On explicitera plus loin le cinquième postulat : une petite affirmation presque aussi banale que les précédentes, mais dont les mathématiciens mettront plus de 2 000 ans à comprendre les tenants et les aboutissants. Si tant est qu'il les aient tous compris: dans la grande querelle du début du XX$^{\text{ème}}$ siècle entre mathématiciens formalistes et mathématiciens intuitionnistes, puis les débats récents sur l'analyse non standard, on trouve un écho des questions longtemps posées à propos de ce cinquième postulat.

Euclide déduit des quatre premiers postulats une série de vingt-huit propositions qui contiennent une part non négligeable de la Géométrie plane. Les célèbres “cas d'égalité des triangles” sont ainsi indépendants du cinquième postulat. C'est seulement pour démontrer la vingt-neuvième proposition (égalité des angles sous lesquels une droite coupe deux parallèles) qu'il l'utilise.

Que dit ce cinquième postulat ? Dans les présentations modernes de la géométrie, on l'exprime sous la forme que lui a donné David Hilbert : «Par un point non situé sur une droite, il passe au plus une parallèle à cette droite». Le fait qu'il en passe au moins une est en effet une conséquence des postulats précédents. Mais ce n'est pas cette forme que lui donne Euclide. Il considère trois droites, dont une, la transversale, coupe les deux autres. Il définit alors les angles “intérieurs” aux points d'intersection, et affirme que si la somme de deux angles intérieurs d'un même côté de la transversale est inférieure à celle de deux angles droits, les deux droites se coupent en un point, situé du côté de la transversale où sont ces angles intérieurs.

L’énoncé de ce postulat et son utilisation dans les *Eléments* posent plusieurs questions. Pour Euclide, la véracité d'un postulat doit être évidente; on doit pouvoir le vérifier sur une figure. C'est le cas des quatre premiers postulats. C'est aussi celui de quelques axiomes qu'Euclide utilise sans le dire, par exemple le fait que deux cercles qui se coupent en un point se coupent aussi en un autre point, ou qu'une droite qui coupe un côté d'un triangle coupe aussi un des deux autres côtés.

Or, la véracité du cinquième postulat n'est pas véritable. Si la somme des angles intérieurs est très voisine de deux droits, le point d'intersection est très éloigné de la transversale. Quelle que soit la grandeur du morceau de plan sur lequel on dessine la figure, on peut tracer des droites pour lesquelles le point d'intersection dont Euclide affirme l'existence est en dehors des limites, et n'est donc pas observable. La forme donnée par Euclide à son cinquième postulat dissimule un “passage à la limite” - l'un des premiers de l'histoire -, outil fondamental que les mathématiciens ont mis des siècles à maîtriser.

L’emploi du cinquième postulat, aussi, est significatif. Euclide n'y fait appel que lorsqu'il a épuisé ce qu'il pouvait tirer des quatre autre. Il lui donne de ce fait un statut moindre. On sait, d'ailleurs, que le postulat est antérieur à Euclide et qu'il avait déjà donné matière à débat; on le trouve, par exemple, dans des textes d'Aristote, qui précèdent les *Eléments* d'une bonne trentaine d'années. Il est infiniment probable qu'Euclide pensait - comme l'ont fait les mathématiciens pendant vingt siècles après lui - que ce postulat était démontrable à partir des autres. Mais il a clairement reconnu qu’il ne savait pas le démontrer. Cela seul suffirait à faire de lui un très grand mathématicien, car la liste est bien fournie de ceux qui ont cru, à tort, y être parvenus.

Le premier d'entre eux, vers 150 après J.-C., est Claude Ptolémée, surtout connu comme astronome mais qui a, pour les besoins de son système du monde, établi bon nombre de théorèmes géométriques ou trigonométriques. L’argumentation de Ptolémée est complexe, mais l'analyse montre qu'il utilise sans s'en rendre compte la forme hilbertienne du postulat, c'est-à-dire l'existence d'au plus une parallèle. Trois siècles encore, et Proclus écrit des commentaires sur l'œuvre d'Euclide, où il critique le recours par ce dernier au cinquième postulat. Si les angles intérieurs ont une somme inférieure à deux droits, Proclus admet que la distance entre les droites diminue, mais cela n'implique pas qu'elles se rejoignent. Il utilise à ce propos l'exemple de l'hyperbole, courbe qui se rapproche indéfiniment de son asymptote sans jamais l'atteindre.

Le postulat n'a donc rien d’évident et doit être démontré.

Pour autant, Proclus ne remet pas sa validité en cause. Il critique la démonstration de Ptolémée et en donne une autre. Mais celle-ci s'appuie sur l'existence de rectangles, c'est-à-dire de quadrilatères qui ont trois angles droits, et pour lesquels Proclus admet que le quatrième angle est aussi droit.
Or, il est impossible de démontrer cette propriété sans recourir à l'une des formes du postulat d'Euclide.

On recense plusieurs autres tentatives de démonstration au cours des siècles qui suivent, en particulier celle du persan Nasr el Din, au XIII$^{\text{ème}}$ siècle, qui tente un raisonnement par l'absurde. Le premier progrès véritable vient avec l'Anglais John Wallis, qui, au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, renonce à démontrer le postulat d'Euclide et propose de le remplacer par un postulat plus simple: la somme des angles d'un triangle est égale à celle de deux angles droits. C'est effectivement une simplification, en ce sens qu'on peut vérifier ce postulat sur une figure, sans passage à la limite. Le postulat de Wallis n'est en rien moins naturel que le quatrième postulat, qui affirme que deux angles droits quelconques sont égaux - le mot “égaux” est à prendre comme signifiant superposables. On peut se demander ce qui se serait passé si Euclide avait adopté la forme de Wallis et utilisé le postulat dès le début des *Eléments*. Peut-être personne n'aurait-il éprouvé le besoin de le démontrer.

Mais le mouvement était trop bien lancé. Peu après Wallis, l’italien Girolamo Saccheri tente de démontrer le postulat par l’absurde.

Il pose qu'il est faux, et entreprend de reconstruire la géométrie sur cette hypothèse pour obtenir une contradiction. Il étudie spécifiquement les “quadrilatères de Saccheri”, qui ont deux angles droits et deux côtés opposés égaux. Ces quadrilatères sont des rectangles si le postulat d'Euclide est vrai, et les deux autres angles sont aussi droits. Saccheri démontre aisément sur la base des quatre premiers postulats que les deux autres angles sont égaux. Il pose que ce sont des angles obtus, en déduit plusieurs conséquences, et obtient finalement la contradiction cherchée. C'est un résultat important qui revient à affirmer que par un point il passe au moins une parallèle à une droite. L’autre hypothèse, celle de deux angles aigus, résiste à tous ses efforts. Saccheri obtient toute une série de résultats, qui seront plus tard des théorèmes de géométrie non euclidienne. Mais, dégoûté, il les rejette tous comme absurdes. Un commentateur a écrit que Saccheri est l'homme qui a trouvé un diamant et l’a jeté en déclarant que c'était un morceau de verre.

Le livre de Saccheri paraît peu avant sa mort en 1733, et passe complètement inaperçu. C'est son compatriote Beltrami qui le découvrira cent cinquante ans plus tard. Quelques années après Beltrami, Lambert retrouve plusieurs des résultats de Saccheri et en ajoute d'autres. Lui ne les rejette pas comme absurdes, et tente même de les interpréter comme la géométrie d'une sphère de rayon imaginaire. Mais, restant en quelque sorte au milieu du gué, il ne considère pas que cette géométrie ait un statut égal à celle d'Euclide.

C'est certainement Carl Friedrich Gauss qui, le premier, conçut ce qu'on pourrait appeler la relativité de la géométrie. Ayant démontré, dès son plus jeune âge, les principaux théorèmes de la géométrie non euclidienne, il comprend qu'il y a là une géométrie tout aussi acceptable que celle d'Euclide. On n'emploie pas ici le mot de “relativité” par hasard. Les travaux de Gauss sur la géométrie le conduisent à des notions comme la courbure intrinsèque d'une surface - intrinsèque signifiant que la courbure est définie à partir de la seule surface, sans faire aucune hypothèse sur l'espace qui la contient. Après généralisation par Bernhard Riemann et d'autres mathématiciens, cette courbure fournira le cadre mathématique sans lequel Einstein n'aurait pas pu formuler sa théorie de la relativité générale.

Mais Gauss, comme il le dira plus tard, «craignait les Béotiens». Il n'a publié ses nombreuses découvertes qu'avec parcimonie, quand il estimait leur avoir donné une forme irréprochable. Ses travaux sur la géométrie non euclidienne sont restés secrets sa vie durant, ou connus seulement de quelques rares correspondants. La prudence de Gauss se comprend quand on réalise qu'un mathématicien de talent comme Legendre croit pouvoir, dans son traité de géométrie publié en 1794, puis à diverses reprises jusqu'à sa mort en 1833, démontrer le postulat d'Euclide. Legendre retrouve le résultat de Saccheri sur l'existence d'au moins une parallèle, mais aucune de ses tentatives ingénieuses pour démontrer l’unicité de cette parallèle n'aboutira.

Parmi les amis de Gauss figure un mathématicien hongrois, Farkas Bolyai. Lui aussi a cru démontrer Euclide, et a adressé en 1799 sa démonstration à Gauss, lequel a immédiatement décelé l'erreur et répondu que ses propres travaux « jetaient un doute sur la validité de la géométrie (euclidienne) ». Farkas a un fils, Janos, qui, au début des années 1820, pose que plusieurs parallèles à une droite passent par le même point et construit sur cette base une géométrie non euclidienne. En particulier, il sépare bien, dans cette géométrie, ce qui est nouveau et ce qui reste de la géométrie euclidienne - il appelle “géométrie absolue” la partie commune. Farkas se propose de publier l'œuvre de son fils en appendice à l'un de ses ouvrages sur la géométrie; il envoie le texte à Gauss. La réponse sera une terrible désillusion pour Janos Bolyai et le dégoûtera des mathématiques. Gauss louange en effet l'ingéniosité du jeune homme, mais ne cache pas que Janos n'a fait que redécouvrir ce que lui-même savait depuis trente ans.

L’ouvrage du père et du fils sera publié en 1831. Mais Janos Bolyai aura alors été précédé par un mathématicien russe, Nicolas Lobatchevski, qui décrivit en 1827 la géométrie non euclidienne. Lobatchevski est ainsi l'inventeur “officiel” de cette géométrie, qu'il nomme géométrie imaginaire, parce qu'il retrouve et établit l'intuition de Lambert sur l'adéquation de cette géométrie à une sphère de rayon imaginaire. Plus sûr de lui que Janos Bolyai, Lobatchevski persévérera et, pendant vingt ans, développera sa géométrie. Ses premières œuvres, publiées en russe, ne seront que lentement diffusées ; aussi écrira-t-il vers 1840 deux courtes présentations en allemand et en français. Cette insistance lui vaudra une certaine reconnaissance, mais aussi le courroux des “Béotiens”. En 1847, il sera indignement chassé de son poste de professeur à l'université de Kazan.

Max Planck, l'inventeur des quanta, a écrit que la vérité ne triomphe que lorsque ses adversaires finissent par mourir. L’histoire est, ici, un peu différente. Ce n'est pas la mort des adversaires, mais bien celle de Gauss, en 1855, qui mit fin au débat. Quand la publication de sa correspondance et de ses notes personnelles montra que le “prince des mathématiciens” avait découvert sans le publier l'essentiel de la géométrie non euclidienne, les attaques cessèrent, sauf de la part de quelques attardés. Parmi ceux-ci, on relève avec surprise le nom de Gottlob Frege, le fondateur de la logique moderne.

Ce qui montre qu'un même homme peut être très en avance sur son temps dans un domaine et en retard dans un autre.

Très vite, Riemann, l'un des rares élèves de Gauss, généralise les géométries d'Euclide et de Lobatchevski. Il étend la notion gaussienne de courbure d'une surface à des espaces de dimension quelconque, et montre comment définir une géométrie sur ces espaces. Pour ce qui est de la géométrie “plane” (à deux dimensions), il modifie quelque peu un des axiomes implicitement utilisé par Euclide - l'hypothèse que si trois points sont alignés, l'un d'eux est entre les deux autres. Il peut alors postuler que deux droites quelconques se coupent, en d'autres termes qu'il n'y a pas de parallèles, et construire sur cette base une géométrie tout aussi cohérente que celles d'Euclide et de Lobatchevski. Plusieurs modèles cosmologiques actuels sont fondés sur cette géométrie riemannienne.

La géométrie euclidienne n'est plus qu’une géométrie parmi d’autres.

Le coup final viendra, en 1872, de Félix Klein. Celui-ci analyse toutes les constructions géométriques de ses prédécesseurs et montre qu'elles sont toujours l'étude des invariants d'un groupe de transformations. La géométrie dans son acception naïve de “science des figures” disparaît alors des mathématiques. Le mot en revanche, n'a pas disparu. Les mathématiciens parlent de géométrie algébrique, de géométrie analytique, de géométrie différentielle.

La première, issue des recherches de Riemann, est une héritière de l'ancienne géométrie en ce sens qu'elle généralise l'étude des courbes et surfaces données par une équation, mais par des procédés tout à fait distincts. La deuxième n'a pas de relation avec sa devancière: elle est le nom moderne de ce qui fut autrefois l'étude des fonctions. La troisième n'a pas non plus grand rapport avec la géométrie classique, à part le vieux problème des “lieux géométriques”.

Au rebours de Saturne qui mangeait ses enfants, ce sont les géomètres modernes qui ont dévoré leurs pères. Les subtils problèmes auxquels ceux-ci ont consacré leurs vies n'apparaissent plus que via d'obscurs corollaires de théorèmes beaucoup plus généraux. C'est tout juste si on les signale parfois à titre de curiosité historique.